

Leslieho matice a vlastní hodnoty

Matematika (MTL)

LDF MENDELU

Model populace modrého ptáčka

Uvažujme zjednodušený model populace jistého druhu modrého ptáčka. Populace je rozdělena do čtyř věkových tříd: vajíčko, mládě v hnízdě, létající mládě a dospělý jedinec. Je známo, že bývá zničeno sedm vajíček ze šestnácti, osmina mlád'at v hnízdě uhynie a další osmina zemře při pokusu o první let. Z létajících mlád'at se dospělosti dožijí tři ze čtyř. Pár dospělých ptáčků přivede na svět průměrně 32 vajíček. Napište matici modelu, určete přírůstek populace a výsledný poměr mezi věkovými skupinami.

[Převzato z <https://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MENDELU/MATM1/Skripta.pdf>]

Model populace modrého ptáčka

Uvažujme zjednodušený model populace jistého druhu modrého ptáčka. Populace je rozdělena do čtyř věkových tříd: vajíčko, mládě v hnízdě, létající mládě a dospělý jedinec. Je známo, že bývá zničeno sedm vajíček ze šestnácti, osmina mlád'at v hnízdě uhynie a další osmina zemře při pokusu o první let. Z létajících mlád'at se dospělosti dožijí tři ze čtyř. Pár dospělých ptáčků přivede na svět průměrně 32 vajíček. Napište matici modelu, určete přírůstek populace a výsledný poměr mezi věkovými skupinami.


[Převzato z <https://www.math.muni.cz/~hasil/Data/CZ/Teach/MENDELU/MATM1/Skripta.pdf>]


Leslieho matice je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Je potřeba najít největší reálnou vlastní hodnotu a k ní příslušný vlastní vektor. K výpočtu můžeme využít například Wolfram Alpha.

eigenvalues {{0,0,0,16},{9/16,0,0,0},{0,3/4,0,0},{0,0,3/4,0}}

 NATURAL LANGUAGE  MATH INPUT

 EXTENDED KEYBOARD  EXAMPLES  UPLOAD  RANDOM

Input

eigenvalues

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ \frac{9}{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Results

Decimal forms

Step-by-step solution

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{3i}{2}$$

$$\lambda_3 = -\frac{3i}{2}$$

$$\lambda_4 = \frac{3}{2}$$

Corresponding eigenvectors

Approximate forms

Step-by-step solution

$$v_1 = \left(-\frac{32}{3}, 4, -2, 1\right)$$

$$v_2 = \left(-\frac{32i}{3}, -4, 2i, 1\right)$$

$$v_3 = \left(\frac{32i}{3}, -4, -2i, 1\right)$$

$$v_4 = \left(\frac{32}{3}, 4, 2, 1\right)$$

Hledaná vlastní hodnota je $\frac{3}{2}$ a příslušný vlastní vektor je $(\frac{32}{3}, 4, 2, 1)$.

- Vlastní hodnota udává přírůstek populace. Hodnota $\frac{3}{2}$ znamená, že v dalším období bude 1,5 násobek populace a tedy přírůstek populace bude 50%.
- Vlastní vektor vyjadřuje výsledné složení věkových tříd populace. Jeho složky udávají poměr složení, ke kterému populace směřuje, tedy $\frac{32}{3} : 4 : 2 : 1$. Tento poměr lze vyjádřit bez použití zlomků jako

$$32 : 12 : 6 : 3.$$

Pokud chceme vyjádřit zastoupení jednotlivých tříd populace v procentech, vydělíme všechny hodnoty jejich součtem (53) a vynásobíme hodnotou 100. Po zaokrouhlení dostaneme

$$60 : 23 : 11 : 6.$$

Na 60 vajíček připadá 23 mlád'at v hnízdě, 11 létajících mlád'at a 6 dospělých ptáčků.