Funkce dvou a více proměnných

Matematika (MTL)

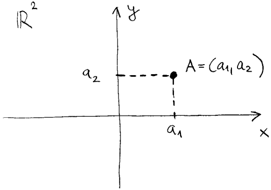
LDF MENDELU

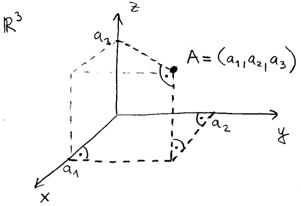
Prostor $\mathbb{R}^n$

- $\mathbb{R}$ – množina reálných čísel (prvky znázorňujeme jako body na číselné ose)
- $\mathbb{R}^n$ – množina uspořádaných n-tic reálných čísel

  Prvky množin $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ znázorňujeme obvykle v kartézské souřadnicové soustavě.

  - $\mathbb{R}^2$ – množina uspořádaných dvojic reálných čísel (prvky znázorňujeme jako body v rovině)
    - souřadnicové osy: x, y
  - $\mathbb{R}^3$ – množina uspořádaných trojic reálných čísel (prvky znázorňujeme jako body v trojrozměrném prostoru)
    - souřadnicové osy: x, y, z
    - souřadnicové roviny: xy $(z = 0)$, xz $(y = 0)$, yz $(x = 0)$





Funkce dvou a více proměnných

Definice (Funkce dvou proměnných)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je neprázdná množina. Pravidlo f, které každému prvku $(x, y) \in M$ přiřazuje právě jeden prvek $z \in \mathbb{R}$, se nazývá funkce dvou proměnných. Píšeme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nebo explicitně $z = f(x, y)$.

- Množina M se nazývá definiční obor funkce f a značí se $D(f)$.
- Množina všech $z \in \mathbb{R}$, pro něž existuje bod $(x, y) \in M$ takový, že $z = f(x, y)$, se nazývá obor hodnot funkce f a značí se $H(f)$.
- Proměnné x, y se nazývají nezávislé proměnné, z se nazývá závislá proměnná.

Definice (Funkce n proměnných)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná množina. Pravidlo f, které každému prvku $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ přiřazuje právě jeden prvek $z \in \mathbb{R}$, se nazývá funkce n proměnných. Píšeme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nebo explicitně $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

- Proměnné $x_1, x_2, \dots, x_n$ se nazývají nezávislé proměnné, z se nazývá závislá proměnná.

Příklad (Příklady funkcí více proměnných)

1. Polynom $z = x^3y - xy^2 + 3xy - 1$.
   Definičním oborem je $\mathbb{R}^2$.

2. Funkce $z = \ln(x - y)$.
   Definičním oborem je množina bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ pro které platí $x - y > 0$, tj. $y < x$.

3. Objem kužele

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

4. Objem kvádru

$$V = abc$$

Grafické znázornění funkce dvou proměnných

Definice (Graf funkce)

Grafem funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ rozumíme množinu všech uspořádaných trojic $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$, kde $(x, y) \in D(f)$.

- Definiční obor funkce je množina bodů v rovině xy.
- Grafem funkce dvou proměnných je množina bodů v trojrozměrném prostoru, obvykle nějaká plocha.
- Pro získání představy, jaký je tvar této plochy nám pomohou řezy význačnými rovinami - souřadnicové roviny $(x = 0, y = 0, z = 0)$ a roviny s nimi rovnoběžné, především řezy rovinami $z = c,\ c \in \mathbb{R}$.

Definice (Vrstevnice funkce)

Vrstevnicí funkce $z = f(x, y)$ na úrovni c rozumíme množinu všech bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro které $f(x, y) = c$.

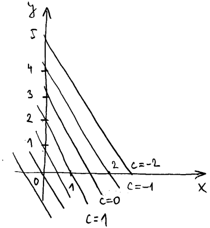
Příklad (Rovina)

Určete vrstevnice funkce $z = 3 - 2x - y$ a nakreslete graf.

- Vrstevnice:

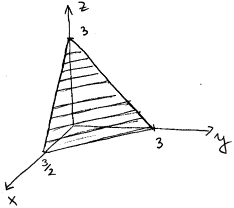
$$3 - 2x - y = c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 3 - 2x - c$$

$$\begin{aligned} c = -1: &\quad y = 4 - 2x \\ c = 0: &\quad y = 3 - 2x \\ c = 1: &\quad y = 2 - 2x \\ c = 2: &\quad y = 1 - 2x \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$



- Graf - určíme průsečíky se souřadnými osami:

$$\begin{aligned} x = 0,\ y = 0 &\Rightarrow z = 3 \\ x = 0,\ z = 0 &\Rightarrow y = 3 \\ y = 0,\ z = 0 &\Rightarrow x = 3/2 \end{aligned}$$

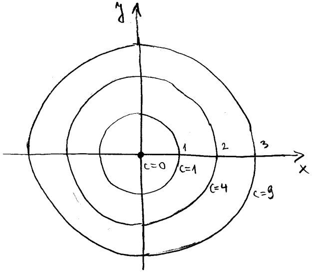


Příklad (Paraboloid)

Určete vrstevnice funkce $z = x^2 + y^2$.

$$x^2 + y^2 = c,\ c \geq 0 \Rightarrow \text{kružnice}$$

$$\begin{aligned} c = 0: &\quad (0,0) \\ c = 1: &\quad x^2 + y^2 = 1 \\ c = 4: &\quad x^2 + y^2 = 4 \\ c = 9: &\quad x^2 + y^2 = 9 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

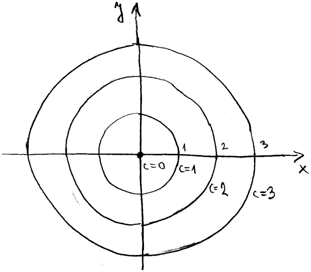


Příklad (Kužel)

Určete vrstevnice funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

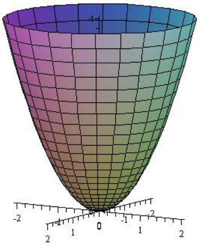
$$\sqrt{x^2 + y^2} = c,\ c \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2 \Rightarrow \text{kružnice}$$

$$\begin{aligned} c = 0: &\quad (0,0) \\ c = 1: &\quad x^2 + y^2 = 1 \\ c = 2: &\quad x^2 + y^2 = 4 \\ c = 3: &\quad x^2 + y^2 = 9 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

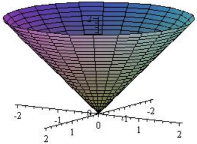


Grafy některých funkcí

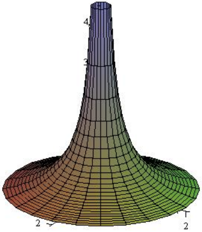
$z = x^2 + y^2$



$z = \sqrt{x^2 + y^2}$

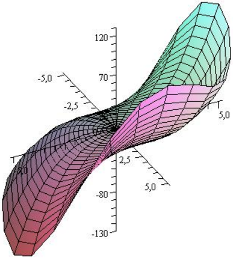


$z = \frac{1}{x^2+y^2}$

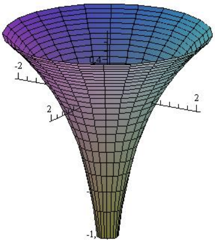


Grafy některých funkcí

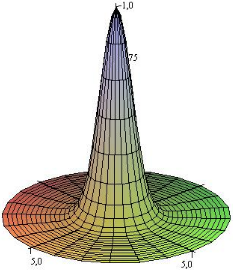
$z = x^3 + y^3$



$z = \ln(x^2 + y^2)$

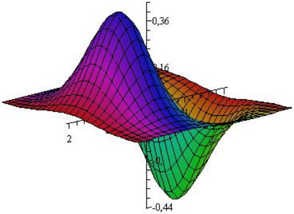


$z = e^{-x^2 - y^2}$

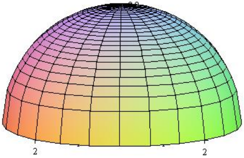


Grafy některých funkcí

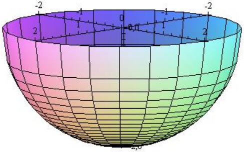
$z = xe^{-x^2-y^2}$



$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$



Využití systémů počítačové algebry

Příklad (Wolfram Alpha)

Určete definiční obor, vrstevnice a nakreslete graf pro $x \in [-3, 3]$ a $y \in [-10, 10]$ funkce

$$y = \sqrt{x^2 - y}.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

- Definiční obor:

  `domain sqrt(x^2-y)`

- Vrstevnice:

  `contour plot sqrt(x^2-y)`

- Graf (viz „real part“):

  `graph sqrt(x^2-y) for x from -3 to 3, y from -10 to 10`