Extrémy, konvexnost a konkávnost

Matematika (MTL)

LDF MENDELU

Monotonie a lokální extrémy

Definice (Monotonie v bodě)

- Řekneme, že funkce f je rostoucí v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0, takové, že $f(x) < f(x_0)$ pro $x \in P^-(x_0)$ a $f(x) > f(x_0)$ pro $x \in P^+(x_0)$.
- Řekneme, že funkce f je klesající v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0, takové, že $f(x) > f(x_0)$ pro $x \in P^-(x_0)$ a $f(x) < f(x_0)$ pro $x \in P^+(x_0)$.
- Analogicky se definuje funkce neklesající a nerostoucí v bodě.

Věta

Funkce je rostoucí (klesající) na otevřeném intervalu právě tehdy, když je rostoucí (klesající) v každém jeho bodě.

Souvislost monotonie s derivací

Věta

- *Je-li $f'(x_0) > 0$, pak je funkce f rostoucí v bodě x_0.*
- *Je-li $f'(x_0) < 0$, pak je funkce f klesající v bodě x_0.*

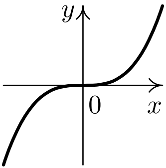
Věta

Nechť f má derivaci na otevřeném intervalu I.

- *Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f na I rostoucí.*
- *Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f na I klesající.*

Obrácení vět neplatí. Například funkce $y = x^3$ je v bodě $x_0 = 0$ rostoucí, ale má zde nulovou derivaci:

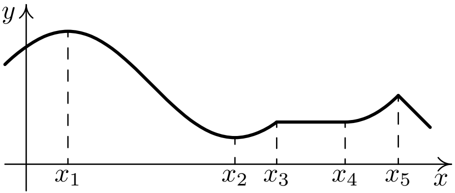
$$y' = 3x^2 \Rightarrow y'(0) = 0.$$



Definice (Lokální extrémy)

Řekneme, že funkce f má v bodě $x_0 \in D(f)$

- lokální maximum (ostré lokální maximum), jestliže existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) > f(x)$) pro každé $x \in P(x_0)$.
- lokální minimum (ostré lokální minimum), jestliže existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že $f(x_0) \leq f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$) pro každé $x \in P(x_0)$.
- Pro lokální maximum a lokální minimum používáme společný název lokální extrémy, ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme společným názvem ostré lokální extrémy.



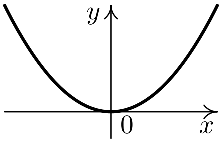
- v bodech x_1, x_3 a x_5 jsou lokální maxima (v bodech x_1 a x_5 ostrá)
- v bodech x_2 a x_4 jsou lokální minima (v bodě x_2 ostré)
- v bodech z intervalu (x_3, x_4) jsou lokální maxima a zároveň i minima (neostrá)

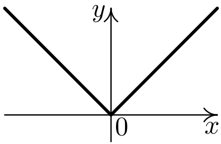
Souvislost lokálních extrémů s derivací

Věta

Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje $f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = 0$.

- Věta neplatí opačně. Například funkce $y = x^3$ má v bodě $x_0 = 0$ nulovou derivace, ale nemá zde lokální extrém (je zde rostoucí).
- Podle předchozí věty může mít funkce f lokální extrémy v bodech, kde $f'(x) = 0$ nebo v bodech, kde nemá derivaci.





- Bod x_0, pro který platí, že $f'(x_0) = 0$, se nazývá stacionární bod.

Věta

Nechť f je spojitá v bodě x_0 a nechť existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0, v němž má f derivaci.

- *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in P^-(x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in P^+(x_0)$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*
- *Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in P^-(x_0)$ a $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in P^+(x_0)$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Předchozí věta říká, že je-li x_0 stacionární bod a derivace f' mění v bodě x_0 znaménko, pak je v bodě x_0 lokální extrém.

O tom, zda ve stacionárním bodě je nebo není extrém, můžeme rozhodnout také podle následující věty.

Věta

Nechť $f'(x_0) = 0$.

- *Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*
- *Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.*

Definice (Konvexnost, konkávnost)

- Řekneme, že funkce f je konvexní v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže f má derivaci v x_0 a existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí leží graf funkce f nad tečnou sestrojenou ke grafu funkce f v bodě x_0, tj.

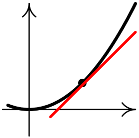
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Řekneme, že funkce f je konkávní v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže f má derivaci v x_0 a existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí leží graf funkce f pod tečnou sestrojenou ke grafu funkce f v bodě x_0, tj.

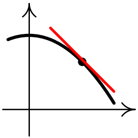
$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- Řekneme, že funkce f je konvexní (konkávní) na otevřeném intervalu, jestliže je konvexní (konkávní) v každém jeho bodě.

Konvexní
(nad tečnou)



Konkávní
(pod tečnou)



Souvislost konvexnosti/konkávnosti s druhou derivací

Věta

Nechť f má druhou derivaci v bodě x_0.

- *Je-li $f''(x_0) > 0$, pak je funkce f konvexní v bodě x_0.*
- *Je-li $f''(x_0) < 0$, pak je funkce f konkávní v bodě x_0.*

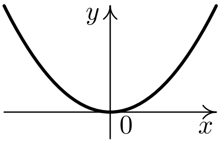
Věta

Nechť f má druhou derivaci na otevřeném intervalu I.

- *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f na I konvexní.*
- *Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f na I konkávní.*

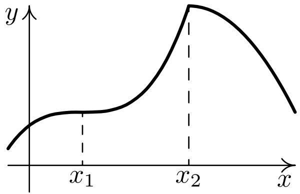
Obrácení vět neplatí. Například funkce $y = x^4$ je v bodě $x_0 = 0$ konvexní, ale má zde nulovou druhou derivaci:

$$y' = 4x^3,\ y'' = 12x^2 \Rightarrow y''(0) = 0.$$



Definice (Inflexní bod)

Bod $x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá inflexní bod funkce f, jestliže existuje $f'(x_0)$ a ryzí okolí bodu x_0 takové, že v levém ryzím okolí je funkce konvexní a v pravém ryzím okolí je funkce konkávní nebo naopak.



- x_1 je inflexní bod
- x_2 není inflexní bod, neboť funkce nemá v tomto bodě derivaci.

Věta

Nechť má funkce f v bodě x_0 inflexní bod a nechť existuje $f''(x_0)$. Pak $f''(x_0) = 0$.

- Věta neplatí opačně. Například funkce $y = x^4$ má v bodě $x_0 = 0$ nulovou druhou derivaci, ale nemá zde inflexní bod (je zde konvexní).

Věta

Nechť f má v bodě x_0 spojitou první derivaci a nechť existuje ryzí okolí $P(x_0)$ bodu x_0, v němž má f druhou derivaci. Je-li $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in P^-(x_0)$ a $f''(x) < 0$ pro všechna $x \in P^+(x_0)$ nebo naopak, pak má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.

Předchozí věta říká, že je-li $f''(x_0) = 0$ a druhá derivace f'' mění v bodě x_0 znaménko, pak je x_0 inflexní bod.

Příklad

Vyšetřete monotonii, lokální extrémy, konvexnost a konkávnost funkce $y = 4x^3 - 3x^4$.

Příklad

Vyšetřete monotonii, lokální extrémy, konvexnost a konkávnost funkce
$y = 4x^3 - 3x^4$.

1) $D(f) = \mathbb{R}$, $y = x^3(4-3x)$

y: $-$ | 0 | $+$ | $\frac{4}{3}$ | $-$

2) $y' = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(1-x)$

y': $+$ $\nearrow$ | 0 | $+$ $\nearrow$ | 1 | $-$ $\searrow$

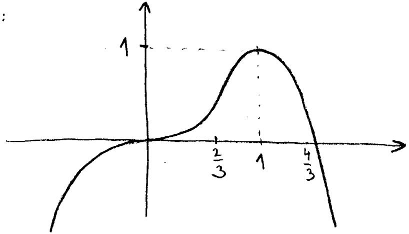
$[1,1]$ lok. max.

3) $y'' = 24x - 36x^2 = 12x(2-3x)$

y'': $-$ $\cap$ | 0 | $+$ $\cup$ | $\frac{2}{3}$ | $-$ $\cap$

$\left[\frac{2}{3}, \frac{16}{27}\right]$ infl. bod

Graf:



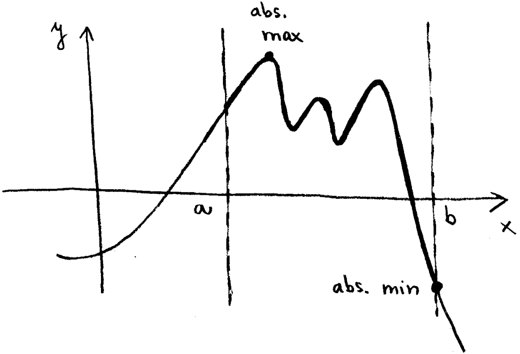
Absolutní extrémy

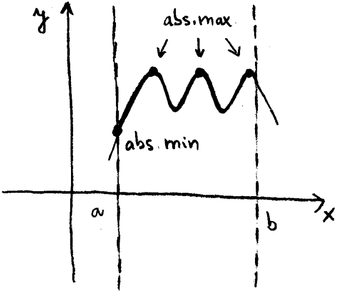
Definice (Absolutní extrémy)

Nechť f je funkce a $M \subseteq D(f)$ množina.

- Jestliže existuje bod $x_0 \in M$ takový, že $f(x_0) \geq f(x)$ pro všechna $x \in M$, pak říkáme, že funkce f nabývá na množině M absolutního maxima v bodě x_0.
- Jestliže existuje bod $x_0 \in M$ takový, že $f(x_0) \leq f(x)$ pro všechna $x \in M$, pak říkáme, že funkce f nabývá na množině M absolutního minima v bodě x_0.

- Funkce může na množině M nabývat absolutních extrémů ve více bodech.
- Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak podle Weierstrassovy věty nabývá funkce f na $\langle a, b\rangle$ své největší a nejmenší hodnoty (absolutních extrémů). Těchto extrémů může funkce f nabývat buď v bodech lokálních extrémů uvnitř intervalu nebo v krajních bodech intervalu.



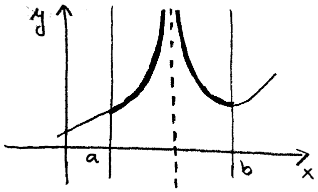


Pokud jsou porušeny předpoklady Weierstassovy věty, tj.

- intevral $\langle a, b\rangle$ uzavřený,
- funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá,

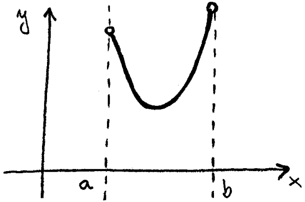
pak nemusí na daném intervalu absolutní extrémy funkce f existovat.

funkce není spojitá:



na $\langle a,b\rangle$ neexistuje absolutní maximum

interval není uzavřený:



na (a,b) neexistuje absolutní maximum

Využití systémů počítačové algebry

Příklad

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

```
local extrema of x^3-3x+1
```