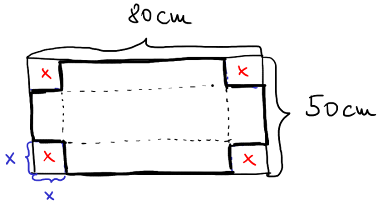
Slovní úlohy na extrémy

Matematika (MTL)

LDF MENDELU

Krabička z kartonu

Z obdélníkového kartonu o rozměrech $80\,\mathrm{cm}$ a $50\,\mathrm{cm}$ chceme vyrobit krabici bez víka tak, že v rozích odstřihneme stejně velké čverce a krabici poté složíme tak, že vzniklé obdélníky přehneme nahoru. Určete, jakou velikost má mít strana odstřihnutých čtverců, aby vzniklá krabice měla co největší objem.



$$V(x) = (80-2x)\cdot(50-2x)\cdot x \longrightarrow \max$$

$$\underline{x \in (0, 25)}$$

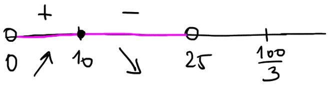
$$V(x) = 4(40-x)(25-x)\cdot x = 4\cdot(x^3 - 65x^2 + 1000x)$$

$$V'(x) = 4\cdot(3x^2 - 130x + 1000)$$

$$3x^2 - 130x + 1000 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{130 \pm \sqrt{16900 - 12000}}{6} = \frac{130 \pm 70}{6} = \begin{cases} \frac{100}{3} > 25 \ \dots \text{nelze} \\ \underline{\underline{10}} \ \checkmark \end{cases}$$

Skutečně max: $V'(x)$:



$\Rightarrow$ Odstřihneme čtverce o velikosti strany $\underline{\underline{10 \text{ cm}}}$.
Krabice bude mít objem $V = 60\cdot 30\cdot 10 = \underline{18\,000 \text{ cm}^3}$.

Trám z kulatiny

Z kulatiny o kruhovém průřezu o průměru r chceme vyřezat trám o obdélníkovém průřezu. Určete rozměry trámu (šírku b a výšku h průřezu) tak, aby měl vzniký trám co největší

(a) objem;

(b) nosnost, tj. aby $N = bh^2$ bylo co největší;

(c) tuhost, tj. aby $T = bh^3$ bylo co největší.

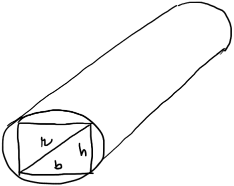
Trám z kulatiny

Z kulatiny o kruhovém průřezu o průměru r chceme vyřezat trám o obdélníkovém průřezu. Určete rozměry trámu (šírku b a výšku h průřezu) tak, aby měl vzniký trám co největší

(a) objem;

(b) nosnost, tj. aby $N = bh^2$ bylo co největší;

(c) tuhost, tj. aby $T = bh^3$ bylo co největší.



předp. $r=1 \Rightarrow b^2+h^2=1$

a) max. objem $\Leftrightarrow$ max. obsah průřezu

$$S = b\cdot h$$
$$S^2 = b^2(1-b^2) = b^2 - b^4$$
$$\max S \Leftrightarrow \max S^2$$

b) $N = bh^2 = b\cdot(1-b^2) = b - b^3$

c) $T = bh^3$
$$T^2 = b^2h^6 = (1-h^2)\cdot h^6 = h^6 - h^8$$
$$\max T \Leftrightarrow \max T^2$$

a) $S^2 = b^2 - b^4$

$$\frac{dS}{db} = 2b - 4b^3 = 2b(1-2b^2) = 0 \Rightarrow \underbrace{b=0}_{\text{nelze}}, \text{ závorka} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &1-2b^2=0 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &h = \sqrt{1-b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = b \Rightarrow \text{ČTVEREC}$$

b) $N = b - b^3$

$$\frac{dN}{db} = 1 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$h = \sqrt{1-b^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow h : b = \sqrt{2} : 1$$

c) $T^2 = h^6 - h^8$

$$\frac{dT^2}{dh} = 6h^5 - 8h^7 = 2h^5(3-4h^2) = 0 \Rightarrow \underbrace{h=0}_{\text{nelze}}, \text{ závorka} = 0$$

$$3 - 4h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

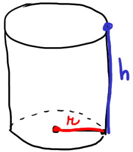
$$b = \sqrt{1-h^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \Rightarrow h : b = \sqrt{3} : 1$$

Válec s nejmenším povrchem

Pro válec daného objemu najděte poměr výšky a poloměru podstavy tak, aby měl válec co nejmenší povrch.

Válec s nejmenším povrchem

Pro válec daného objemu najděte poměr výšky a poloměru podstavy tak, aby měl válec co nejmenší povrch.



$$V = \pi r^2 \cdot h \quad , \quad S = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

předp. $V = 1 \Rightarrow \pi \cdot r^2 \cdot h = 1 \Rightarrow h = \dfrac{1}{\pi r^2}$

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + 2 \cdot r^{-1}$$

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - 2 \cdot r^{-2} = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2}$$

$$\frac{dS}{dr} = 0 : \quad 4\pi r^3 - 2 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

$$h = \frac{1}{\pi \cdot r^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt[3]{4\pi^2} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{\pi^3}} = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$$

poměr : $\dfrac{h}{r} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{\pi}} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\pi} = \sqrt[3]{8} = 2 \Rightarrow h : r = 2 : 1$

výška = průměr podstavy

Oplocování pozemku

Chceme oplotit pozemek obdélníkového tvaru, jehož jedna strana je rovná přirozená hranice (například zeď domu nebo řeka), oplocujeme tedy jen ze tří stran.

(a) Jaký tvar pozemku je ideální zvolit, pokud je dána délka pletiva a chceme mít co největší plochu pozemku?

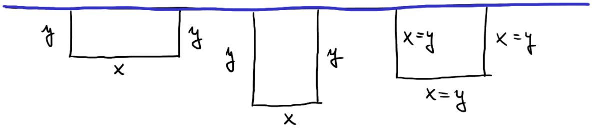
(b) Jaký tvar pozemku je ideální zvolit, pokud je dána plocha pozemku a chceme mít co nejmenší spotřebu pletiva?

Oplocování pozemku

Chceme oplotit pozemek obdélníkového tvaru, jehož jedna strana je rovná přirozená hranice (například zeď domu nebo řeka), oplocujeme tedy jen ze tří stran.

(a) Jaký tvar pozemku je ideální zvolit, pokud je dána délka pletiva a chceme mít co největší plochu pozemku?

(b) Jaký tvar pozemku je ideální zvolit, pokud je dána plocha pozemku a chceme mít co nejmenší spotřebu pletiva?



a) $L = x + 2y$ konst.

$S = x \cdot y \to \max.$

b) $S = x \cdot y$ konst.

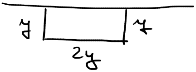
$L = x + 2y \to \max$

a) $L = x + 2y$ konst. $\Rightarrow x = L - 2y$

$$S = (L-2y)\cdot y = Ly - 2y^2$$

$$\frac{dS}{dy} = L - 4y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{L}{4}}} \Rightarrow \underline{\underline{x}} = L - \frac{L}{2} = \underline{\underline{\frac{L}{2}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x : y = 2 : 1}}$$



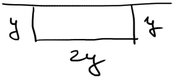
b) $S = x \cdot y$ konst. $\Rightarrow x = \frac{S}{y}$

$$L = \frac{S}{y} + 2y = S\cdot y^{-1} + 2y$$

$$\frac{dL}{dy} = -S\cdot y^{-2} + 2 = -\frac{S}{y^2} + 2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{S}{2} \Rightarrow \underline{\underline{y = \sqrt{\frac{S}{2}}}}$$

$$\underline{\underline{x}} = \frac{S}{y} = S\cdot\sqrt{\frac{2}{S}} = \underline{\underline{\sqrt{2}\cdot\sqrt{S}}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{S}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{S}} = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x : y = 2 : 1}}$$

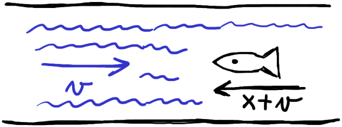


Rychlost ryby v řece

Ryba, která plave v řece proti proudu, vydá pro překonání určité vzdálenosti energii

$$E = k\frac{(x+v)^3}{x},$$

kde v je rychlost proudu v řece, x je rychlost ryby vzhledem ke břehu a $x+v$ je rychlost ryby vzhledem k vodě. Určete rychlost ryby, při které je její energetický výdej nejmenší.



Hledáme minimum funkce

$$f(x) = \frac{(x+v)^3}{x}\,.$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{3(x+v)^2 \cdot x - (x+v)^3}{x^2} = \frac{(x+v)^2 \cdot (3x - x - v)}{x^2} = \frac{(x+v)^2 \cdot (2x-v)}{x^2}$$

nulové body:

- $x+v=0 \Rightarrow x=-v$ ... ryba neplave, proud ji unáší zpět
- $2x-v=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{v}{2}}}$ ... rychlost ryby vzhledem ke břehu

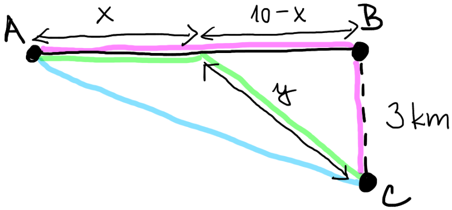
$x+v = \frac{v}{2} + v = \underline{\underline{\frac{3v}{2}}}$ ... rychlost ryby vzhledem k vodě

Nejlevnější silnice

Město B je $10\,\mathrm{km}$ východně od města A, město C je $3\,\mathrm{km}$ jižně od města B. Z města A do města C se má postavit silnice. Cena jednoho kilometru silnice je 4 miliony korun podél existující silnice z A do B a 5 milionů korun jinde. Kudy je nejlepší vést novou silnici, aby náklady na její výstavbu byly co nejmenší?

Nejlevnější silnice

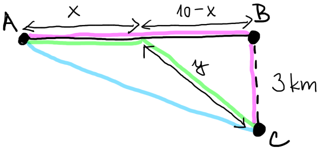
Město B je $10\,\mathrm{km}$ východně od města A, město C je $3\,\mathrm{km}$ jižně od města B. Z města A do města C se má postavit silnice. Cena jednoho kilometru silnice je 4 miliony korun podél existující silnice z A do B a 5 milionů korun jinde. Kudy je nejlepší vést novou silnici, aby náklady na její výstavbu byly co nejmenší?



cena silnice:

$$P = 4x + 5y$$

$$x \in [0, 10]$$



cena silnice:

$$P = 4x + 5y$$

$$x \in [0, 10]$$

$$y^2 = (10-x)^2 + 9 \Rightarrow y = \sqrt{(10-x)^2 + 9}$$

$$P(x) = 4x + 5 \cdot \sqrt{(10-x)^2 + 9}$$

$$P'(x) = 4 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(10-x)^2+9}} \cdot 2(10-x) \cdot (-1) = 4 - \frac{5 \cdot (10-x)}{\sqrt{(10-x)^2+9}}$$

nulové body: $5 \cdot (10-x) = 4 \cdot \sqrt{(10-x)^2 + 9} \quad /()^2$

$$25\,(10-x)^2 = 16\left[(10-x)^2 + 9\right]$$

$$9\,(10-x)^2 = 9 \cdot 16$$

$$10 - x = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x_1 = 6}} \\ x_2 = 14 > 10 \ \ldots \text{ NELZE} \end{cases}$$

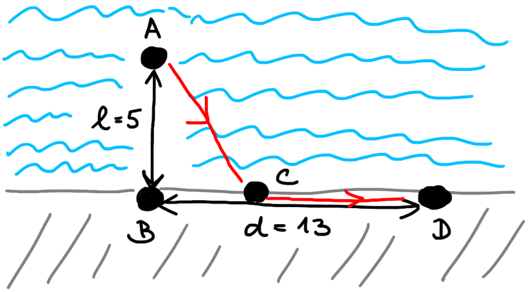
$\underline{\underline{x = 6}} \Rightarrow \underline{\underline{y}} = \sqrt{4^2 + 9} = \underline{\underline{5}} \Rightarrow$ CENA: $P = 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 = \underline{\underline{49 \text{ mil}}}$

Porovnáme krajní varianty: $x = 0,\ y = \sqrt{109} \Rightarrow P = 5 \cdot \sqrt{109} = 52{,}2$ mil.

$x = 10,\ y = 3 \Rightarrow P = 4 \cdot 10 + 5 \cdot 3 = 55$ mil.

Let ptáků nad hladinou

Ornitologové zjistili, že některé druhy ptáků nerady létají nad vodními plochami, protože pro let nad vodou je třeba větší výdej energie než nad pevninou.
Pták s tímto druhem chování byl vypuštěn z ostrova (bod A) vzdáleného $5\,\mathrm{km}$ od pobřeží (bod B) a cílem jeho letu je bod D na pobřeží vzdálený $13\,\mathrm{km}$ od B.
Pták instinktivně volí cestu s nejmenším výdejem energie, tj. letí nejprve do bodu C a poté pokračuje nad pevninou do bodu D.



(a) Určete polohu bodu C, pokud platí, že pro zdolání určité vzdálenosti nad vodou je nutno vydat $1,4$ krát více energie než nad pevninou.

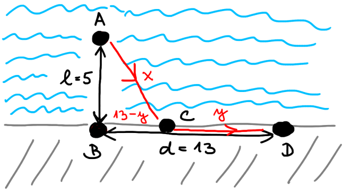
(b) Předpokládejme, že některé druhy ptáků odbočují v bodě C vzdáleném $4\,\mathrm{km}$ od bodu B. Kolikrát je pro tento druh ptáků namáhavější let nad vodou než nad pevninou?

(c) Kolikrát musí být namáhavější let nad vodou, aby se ptákům vyplatilo letět přímou cestou?

(a) Určete polohu bodu C, pokud platí, že pro zdolání určité vzdálenosti nad vodou je nutno vydat $1,4$ krát více energie než nad pevninou.

(b) Předpokládejme, že některé druhy ptáků odbočují v bodě C vzdáleném $4\,\mathrm{km}$ od bodu B. Kolikrát je pro tento druh ptáků namáhavější let nad vodou než nad pevninou?

(c) Kolikrát musí být namáhavější let nad vodou, aby se ptákům vyplatilo letět přímou cestou?



Vydaná energie je úměrná funkci

$f = k \cdot x + y$, kde

k udává, kolikrát je větší výdej energie nad vodou než nad pevninou.

$$x^2 = (13-y)^2 + 25 \implies f(y) = k \cdot \sqrt{(13-y)^2+25} + y$$

$$f'(y) = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(13-y)^2+25}} \cdot 2(13-y) \cdot (-1) + 1 = \frac{-k(13-y)}{\sqrt{(13-y)^2+25}} + 1$$

Nejmenší výdej energie nastane, pokud $f'(y) = 0$, tj.

$$k \cdot (13-y) = \sqrt{(13-y)^2+25}.$$

Nejmenší výdej energie nastane, pokud $f'(y) = 0$, tj.

$$k \cdot (13-y) = \sqrt{(13-y)^2 + 25}.$$

a) $k = 1{,}4$: $\quad 1{,}4 \cdot (13-y) = \sqrt{(13-y)^2 + 25} \quad /()^2$

$$(1{,}4)^2 \cdot (13-y)^2 = (13-y)^2 + 25$$

$$0{,}96 \cdot (13-y)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad 13-y = \frac{5}{\sqrt{0{,}96}} \doteq \underline{\underline{5{,}1}}$$

$\Rightarrow$ Bod C je 5,1 km od bodu B.

b) $13 - y = 4$, $k = ?$

$$k \cdot 4 = \sqrt{16+25} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\sqrt{41}}{4} \doteq \underline{\underline{1{,}6}}$$

c) $y = 0$: $\quad k \cdot 13 = \sqrt{169+25} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\sqrt{194}}{13} \doteq \underline{\underline{1{,}07}}$