

Slovní úlohy na derivace

Matematika (MTL)

LDF MENDELU

Rychlost rozšiřování spáleníště

Oheň se v suché pláni šíří do stále většího kruhu. Poloměr roste rychlostí 2 metry za minutu. Jak rychle roste plocha zasažená ohněm, jestliže poloměr spláleníště je 30 metrů?

Rychlost rozšiřování splámení

Oheň se v suché pláni šíří do stále většího kruhu. Poloměr roste rychlostí 2 metry za minutu. Jak rychle roste plocha zasažená ohněm, jestliže poloměr splámení je 30 metrů?

$$\frac{dr}{dt} = 2 \text{ m/min}$$

$$r = 30 \text{ m}$$

$$\frac{dS}{dt} = ?$$

$$S = \pi r^2$$

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi r \cdot \frac{dr}{dt}$$

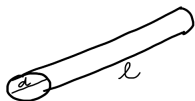
$$\text{dosadíme: } \frac{dS}{dt} = 2\pi \cdot 30 \cdot 2 = \underline{\underline{377 \text{ m}^2/\text{min}}}$$

Změna objemu vlivem teplotní roztažnosti

Kovová tyč o průměru 6 centimetrů a délce 40 centimetrů je zahřívána. Vlivem teplotní roztažnosti roste délka tyče rychlostí 0,0005 centimetrů za minutu a průměr tyče roste rychlostí 0,0002 centimetrů za minutu. Jak rychle roste objem tyče?

Změna objemu vlivem teplotní roztažnosti

Kovová tyč o průměru 6 centimetrů a délce 40 centimetrů je zahřívána. Vlivem teplotní roztažnosti roste délka tyče rychlostí 0,0005 centimetrů za minutu a průměr tyče roste rychlostí 0,0002 centimetrů za minutu. Jak rychle roste objem tyče?



$$V = \pi \cdot r^2 \cdot l$$

$$r = \frac{d}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$l = 40 \text{ cm}$$

$$\frac{dl}{dt} = 0,0005 \text{ cm/min}$$

$$\frac{dr}{dt} = 0,0001 \text{ cm/min}$$

$$\frac{dV}{dt} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi \cdot 2r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot l + \pi \cdot r^2 \cdot \frac{dl}{dt}$$

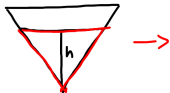
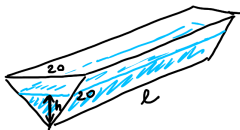
$$\text{dosadíme: } \frac{dV}{dt} = \pi \cdot 6 \cdot 0,0001 \cdot 40 + \pi \cdot 9 \cdot 0,0005 = \underline{\underline{0,0895 \text{ cm}^3/\text{min}}}$$

Rychlost s jakou roste hladina v nádrži

Koryto na vodu má průřez rovnostranného trojúhelníka o straně 20 centimetrů a je dlouhé 80 centimetrů. Přitéká do něj voda rychlostí $15 \text{ cm}^3/\text{min}$. Hloubka vody v korytě je 8 cm. Jak rychle roste hladina, tj. hloubka vody?

Rychlost s jakou roste hladina v nádrži

Koryto na vodu má průřez rovnostranného trojúhelníka o straně 20 centimetrů a je dlouhé 80 centimetrů. Přitéká do něj voda rychlostí $15 \text{ cm}^3/\text{min}$. Hloubka vody v korytě je 8 cm. Jak rychle roste hladina, tj. hloubka vody?



$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\frac{3}{4}a^2 = h^2$$

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}h$$

$$h = 8 \text{ cm}$$

$$l = 80 \text{ cm}$$

$$\frac{dV}{dt} = 15 \text{ cm}^3/\text{min}$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$V = \frac{1}{2} a \cdot h \cdot l$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot h \cdot h \cdot l = \frac{1}{\sqrt{3}} h^2 \cdot l$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2h \cdot \frac{dh}{dt} \cdot l \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2h \cdot l} \cdot \frac{dV}{dt}}$$

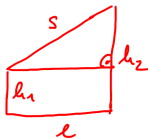
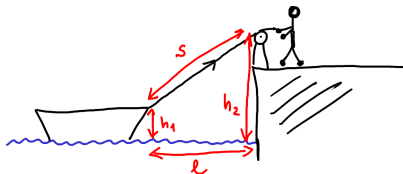
$$\text{dosadíme: } \frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 8 \cdot 80} \cdot 15 = \underline{\underline{0,02 \text{ cm}/\text{min}}}$$

Rychlost přitahované loďky

Muž na molu přitahuje přes kladku loď na laně. Lano je uvázáno na přídi 40 centimetrů nad vodou. Rychlost lana je 1 metr za sekundu. Loď je 7 metrů od mola, vrch kladky je 3 metry nad vodou. Jak rychle se blíží loď k molu?

Rychlost přitahované loďky

Muž na molu přitahuje přes kladku loď na laně. Lano je uvázáno na přídi 40 centimetrů nad vodou. Rychlost lana je 1 metr za sekundu. Loď je 7 metrů od mola, vrch kladky je 3 metry nad vodou. Jak rychle se blíží loď k molu?



$$h_1 = 0,4 \text{ m}$$

$$h_2 = 3 \text{ m}$$

$$l = 7 \text{ m}$$

$$\frac{ds}{dt} = 1 \text{ m/s}$$

$$\frac{dl}{dt} = ?$$

$$s^2 = l^2 + \underbrace{(h_2 - h_1)^2}_{\text{konst.}}$$

$$2s \cdot \frac{ds}{dt} = 2l \cdot \frac{dl}{dt} \Rightarrow \frac{dl}{dt} = \frac{s}{l} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{l^2 + (h_2 - h_1)^2}}{l} \cdot \frac{ds}{dt}$$

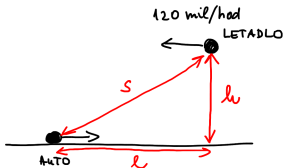
$$\text{dosadíme: } \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{49 + (2,6)^2}}{7} \cdot 1 = \underline{\underline{1,067 \text{ m/s}}}$$

Dálniční hlídka

Letadlo dálniční hlídky letí 3 míle vysoko nad vozovkou rychlostí 120 mil za hodinu. Pilot zaměří radarem auto jedoucí proti směru letu letadla a zjistí, že auto se při vzdálenosti 5 mil od auta přibližuje rychlostí 160 mil za hodinu. Určete rychlost auta.

Dálniční hlídka

Letadlo dálníční hlídky letí 3 míle vysoko nad vozovkou rychlostí 120 mil za hodinu. Pilot zaměří radarem auto jedoucí proti směru letu letadla a zjistí, že auto se při vzdálenosti 5 mil od auta přibližuje rychlostí 160 mil za hodinu. Určete rychlost auta.



$$h = 3 \text{ mile}$$

$$s = 5 \text{ mil}$$

$$\frac{ds}{dt} = 160 \text{ mil/hod}$$

$$s^2 = l^2 + \underbrace{h^2}_{\text{konst}} \quad \Rightarrow \quad 2s \cdot \frac{ds}{dt} = 2l \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dl}{dt} = \frac{s}{l} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{s}{\sqrt{s^2 - h^2}} \cdot \frac{ds}{dt}}$$

$$\text{dosadíme: } \frac{dl}{dt} = \frac{5}{\sqrt{25-9}} \cdot 160 = \underline{200 \text{ mil/hod}} \quad \dots \text{ součet rychlostí:} \\ \text{auta a letadla}$$

$$\text{rychlost auta: } v = 200 - 120 = \underline{\underline{80 \text{ mil/hod}}}$$

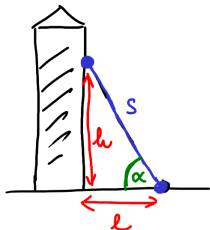
O dům je opřený žebřík dlouhý 13 metrů. Náhle začne základna žebříku podkluzovat. Ve chvíli, kdy je základna žebříku 12 metrů od domu, klouže žebřík rychlostí 5 metrů za sekundu.

- (a) Jakou rychlostí klesá vršek žebříku po zdi domu?
- (b) Jakou rychlostí se mění úhel, který svírá žebřík se zemí?

Žebřík

O dům je opřený žebřík dlouhý 13 metrů. Náhle začne základna žebříku podkluzovat. Ve chvíli, kdy je základna žebříku 12 metrů od domu, klouže žebřík rychlostí 5 metrů za sekundu.

- (a) Jakou rychlostí klesá vršek žebříku po zdi domu?
- (b) Jakou rychlostí se mění úhel, který svírá žebřík se zemí?



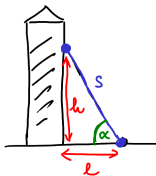
$$s = 13 \text{ m}$$

$$l = 12 \text{ m}$$

$$\frac{dl}{dt} = 5 \text{ m/s}$$

$$a) \frac{dh}{dt} = ?$$

$$b) \frac{d\alpha}{dt} = ?$$



$$s = 13 \text{ m}$$

$$l = 12 \text{ m}$$

$$\frac{dl}{dt} = 5 \text{ m/s}$$

$$a) \frac{dh}{dt} = ?$$

$$b) \frac{d\alpha}{dt} = ?$$

$$a) \underbrace{s^2 = h^2 + l^2}_{\text{konst}} \Rightarrow 0 = 2h \cdot \frac{dh}{dt} + 2l \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{l}{h} \cdot \frac{dl}{dt} = -\frac{l}{\sqrt{s^2 - l^2}} \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\text{dosadíme: } \frac{dh}{dt} = -\frac{12}{\sqrt{169 - 144}} \cdot 5 = \underline{\underline{-12 \text{ m/s}}}$$

$$b) \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{h}{l}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2} \cdot \frac{\frac{dh}{dt} \cdot l - h \cdot \frac{dl}{dt}}{l^2} = \frac{\overset{\text{via a)}}{-12} \cdot l - h \cdot \overset{\text{via a)}}{5}}{\underbrace{l^2 + h^2}_{s^2}}$$

$$\text{dosadíme: } \frac{d\alpha}{dt} = \frac{-12 \cdot 12 - 5 \cdot 5}{13^2} = \underline{\underline{-1 \text{ rad/s}}}$$

Nafukování míče

Kulatý míč je nafukován rychlostí $5 \text{ cm}^3/\text{min}$. Jak rychle roste poloměr míče v okamžiku, kdy je jeho velikost 10 centimetrů?

Nafukování míče

Kulatý míč je nafukován rychlostí $5 \text{ cm}^3/\text{min}$. Jak rychle roste poloměr míče v okamžiku, kdy je jeho velikost 10 centimetrů?

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$r = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{dV}{dt} = 5 \text{ cm}^3/\text{min}$$

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

dosadíme:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 100} \cdot 5 = \underline{\underline{0,004 \text{ cm}/\text{min}}}$$