① Matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ převeďte na schodový tvar a určete její hodnost.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-2) & |\cdot(-3) & |\cdot(-4) \\ + & + & + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 0 & -15 & -17 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-2) & |\cdot(-3) \\ + & + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A) = 4$$

Řádky matice jsou lineárně nezávislé vektory.

② Matici $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ převeďte do schodovitého tvaru a určete její hodnost.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-2) \;\; |\cdot(-1) \;\; |\cdot(-3) \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{2} & \cancel{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ |\cdot(-3) + \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow h(B) = 3$$

Řádky matice B jsou lineárně závislé vektory.

③ Najděte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot(-1) \;\; /\cdot 3 \\ \\ /\cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot 2 \\ /\cdot 3 \\ /\cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /\cdot 3 \end{array}$$

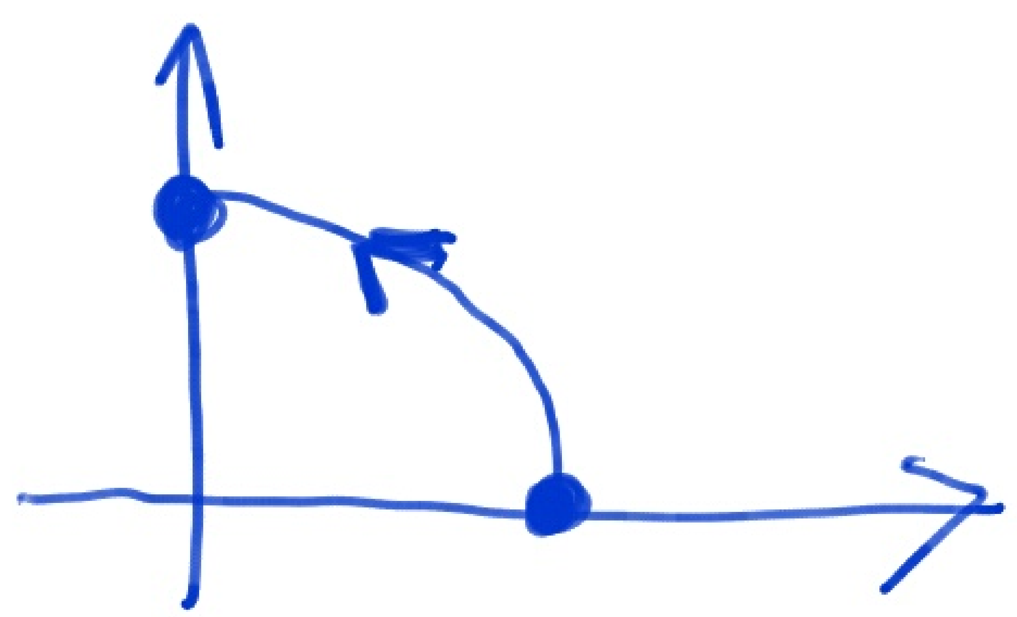
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 8 & 10 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} /:4 \\ /:(-2) \\ /\cdot(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = I}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

4 $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ... matice rotace o úhel φ v kladném smyslu.

Uvažujte matice rotace o úhly $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ a ověřte, že jsou inverzní.



$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{\frac{\pi}{2}} \cdot R_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}} = I \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R_{\frac{\pi}{2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$R_{-\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{R_{-\frac{\pi}{2}} \cdot R_{\frac{\pi}{2}}}_{I} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(5) Vypočtěte determinanty matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

---

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - (-2)\cdot 3 = 2 + 6 = \underline{\underline{8}}$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0\cdot 3 - (-1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 0\cdot 1)$

$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$

$= 1 + 4 + 0 - (-1 + 6 + 0) = 5 - 5 = \underline{\underline{0}}$

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočtěte det A a odpovězte následující otázky:

a) Existuje A^{-1}?

b) Jsou řádky matice A lin. závislé nebo nezávislé?

c) Jaká je hodnost matice A?

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right| = 0 + 0 + 12 - (3 + 4 + 0)$$

$$\begin{array}{ccc} \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$= 12 - 7 = \underline{\underline{5}}$$

a) A^{-1} existuje

b) Řádky nezávislé.

c) $h(A) = 3$

7 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vypočtěte det B a odpovězte na otázky:

a) Existuje B^{-1}?

b) Jsou řádky lineárně závislé nebo nezávislé?

c) Jaká je hodnost matice B?

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 0 - (6 - 1 + 0) = 5 - 5 = \underline{\underline{0}}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}$$

a) B^{-1} neexistuje.

b) Řádky jsou lineárně závislé!

c) $h(B) = 2$