evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklady: Extrémy – lokální, vázané, absolutní

Inženýrská matematika, Vyšší matematika, LDF MENDELU

Lokální extrémy

Najděte body, ve kterých mají následující funkce lokální extrémy:

1. $z = x^2 + (y-1)^2$ [(0,1)-lok. min.]
2. $z = x^2 - (y-1)^2$ [(0,1)-není extrém]
3. $z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$ [(1,0)-lok. min]
4. $z = x^3 + y^3 - 6xy$ [(2,2)-lok. min., (0,0)-není extrém]
5. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ [$(1, \frac{1}{2})$-lok. min., (0,0)-není extrém]
6. $z = 2xy - 8x - 4y + 1$ [(2,4)-není extrém]
7. $z = 4xy - 16x - 8y + 7$ [(2,4)-není extrém]
8. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$ [(2,−2)-lok. max.]
9. $z = x^3 - 3xy + y^2 + y - 7$ [(1,1)-lok. min., $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$-není]
10. $z = y^4 + 32x^2 - 32xy$ [(1,2)-lok. min., (−1,−2)-lok. min., (0,0)-není extrém]
11. $z = x^2 + y^2 + 4x - 2y$ [(−2,1)-lok. min.]
12. $z = xy - x + y$ [(−1,1)-není extrém]
13. $z = x^3 - 6xy + 3y^2$ [(2,2)-lok. min., (0,0)-není extrém]
14. $z = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y^2$ [(0,0)-max., (0,2)-ne, (1,0)-ne, (1,2)-min., (−1,0)-ne, (−1,2)-min.]
15. $z = y^3 - 6xy + x^2 + 15y - 5$ [(3,1)-není extrém, (15,5)-lok. min.]
16. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 15$ [(0,0)-není extrém, (3,3)-lok. min.]
17. $z = x^3 - 3xy + y^2 - 2y$ [(2,4)-lok. min., $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$-není extrém]
18. $z = 2x^3 + xy^2 - 5x^2 + y^2$ [$(\frac{5}{3}, 0)$-lok. min., (0,0)-není extrém]

19. $z = x^2 - y^2 - x^2y + 3y + 4$ $[(0, \frac{3}{2})$-lok. max., $(1,1)$-není $(-1,1)$-není$]$

20. $z = x^3 + xy^2 - 6xy$ $[(-\sqrt{3}, 3)$-lok. max., $(\sqrt{3}, 3)$-lok. min., $(0,0)$-není, $(0,6)$-není$]$

21. $z = y^4 + 8x^2 - 8xy - 1$ $[(\frac{1}{2}, 1)$-lok. min., $(-\frac{1}{2}, -1)$-lok. min., $(0,0)$-není$]$

22. $z = 4xy - xy^2 - x^2y$ $[(0,0)$-není, $(0,4)$-není, $(4,0)$-není, $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$-lok. max.$]$

23. $z = x^4 + y^4 - 4xy - 6$ $[(0,0)$-není, $(1,1)$-lok. min., $(-1,-1)$-lok. min.$]$

24. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ $[(-2,0)$-lok. min.$]$

25. $z = 4 + e^{-2y}(xy - x^2 + y^2)$ $[(0,0)$-není, $(\frac{1}{2}, 1)$-lok. max.$]$

26. $z = e^x(x + y + y^2)$ $[(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$-lok. min.$]$

Vázané lokální extrémy

Najděte body, ve kterých mají následující funkce vázané lokální extrémy:

1. $z = x^2 + 3y^2$, je-li $x - 2y + 7 = 0$ $[(-3,2)$-vázané lok. min.$]$
2. $z = e^{xy}$, je-li $x + y = 4$ $[(2,2)$-vázané lok. max.$]$
3. $z = xy$, je-li $x + y + 2 = 0$ $[(-1,-1)$-vázané lok. max.$]$
4. $z = y^2 - 4x^3$, je-li $2x - y + 1 = 0$ $[(1,3)$-vázané lok. max., $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$-vázané lok. min.$]$
5. $z = x^2 + y^2$, je-li $2x + y = 1$ $[(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$-vázané lok. min.$]$

Absolutní extrémy

Najděte absolutní extrémy funkce $z = f(x,y)$ na množině M.

1. $z = y - x^2$, M je trojúhelník s vrcholy $A[0,1],\ B[-1,-1],\ C[1,-1]$
   $[z_{\min} = -2$ v bodech $(-1,-1)$ a $(1,-1)$, $z_{\max} = -1$ v bodě $(0,1)]$
2. $z = \sqrt{x^2 - y}$, M je trojúhelník s vrcholy $A[-1,-1],\ B[1,-1],\ C[1,-3]$
   $[z_{\min} = 1$ v bodě $(0,-1)$, $z_{\max} = 2$ v bodě $(1,-3)]$
3. $z = \sqrt{\sqrt{x} - y}$, M je obdélník s vrcholy $A[0,0],\ B[1,1],\ C[0,-3],\ D[1,-3]$
   $[z_{\min} = 0$ v bodě $(0,0)$, $z_{\max} = 2$ v bodě $(1,-3)]$
4. $z = y - x^2$, M je čtverec s vrcholy $A[-1,1],\ B[1,1],\ C[1,3],\ D[-1,3]$
   $[z_{\min} = 0$ v bodech $(-1,1)$ a $(1,1)$, $z_{\max} = 3$ v bodě $(0,3)]$
5. $z = x - 2y - 3$, M je trojúhelník s vrcholy $A[0,0],\ B[1,0],\ C[0,1]$
   $[z_{\min} = -5$ v bodě $(0,1)$, $z_{\max} = -2$ v bodě $(1,0)]$

6. $z = x^2 + y^2,\ M = \{[x, y];\ x \leq 2,\ x \geq y^2\}$

   $[z_{\min} = 0$ v bodě $(0, 0)$, $z_{\max} = 6$ v bodech $(2, -\sqrt{2}),\ (2, \sqrt{2})]$

7. $z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 3,\ M$ je trojúhelník s vrcholy $A[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}],\ B[2, \frac{1}{2}],\ C[\frac{1}{2}, 2]$

   $[z_{\min} = 1$ v bodě $(1, 1)$, $z_{\max} = \frac{9}{4}$ v bodech $(2, \frac{1}{2}),\ (\frac{1}{2}, 2)]$

8. $z = x^2 + y^2 - 6y$, $M = \{[x, y];\ y \leq 2,\ y \geq 2x^2\}$

   $[z_{\min} = -8$ v bodě $(0, 2)$, $z_{\max} = 0$ v bodě $(0, 0)]$

9. $z = x + 3y$, M je určena nerovnostmi: $-3x + 4y \leq 12$, $x \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

   $[z_{\min} = 0$ v bodě $(0, 0)$, $z_{\max} = 22$ v bodě $(4, 6)]$

10. $z = -3x + 2y$, M je určena nerovnostmi: $x - 3y \leq 3$, $2x + 3y \leq 15$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

    $[z_{\min} = -16$ v bodě $(6, 1)$, $z_{\max} = 10$ v bodě $(0, 5)]$

11. $z = 2x + y$, M je určena nerovnostmi: $x - 2y \leq 2$, $-2x + y \leq 0$, $y \geq 0$

    $[z_{\min} = 0$ v bodě $(0, 0)$, maximum neexistuje]

Vytvořeno s podporou projektu Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu `http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz` (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.