

Euklidovský prostor. Funkce dvou proměnných: základní pojmy, limita a spojitost.

Vyšší matematika, Inženýrská matematika

LDF MENDELU

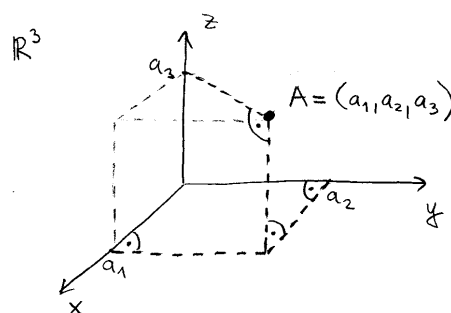
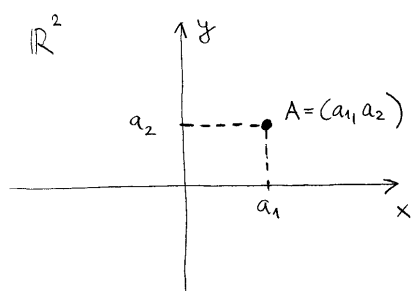
Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Prostor \mathbb{R}^n

- \mathbb{R} – množina reálných čísel (prvky znázorňujeme jako body na číselné ose)
- \mathbb{R}^n – množina uspořádaných n -tic reálných čísel

Prvky množin \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 znázorňujeme obvykle v kartézské souřadnicové soustavě.

- \mathbb{R}^2 – množina uspořádaných dvojic reálných čísel (prvky znázorňujeme jako body v rovině)
 - souřadnicové osy: x, y
- \mathbb{R}^3 – množina uspořádaných trojic reálných čísel (prvky znázorňujeme jako body v trojrozměrném prostoru)
 - souřadnicové osy: x, y, z
 - souřadnicové roviny: xy ($z = 0$), xz ($y = 0$), yz ($x = 0$)



Vzdálenost v \mathbb{R}^n

Definice (Euklidovský metrický prostor)

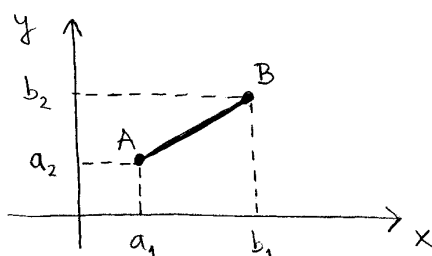
Nechť $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $B = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

- **Euklidovská vzdálenost** bodů A, B je číslo $\varrho(A, B)$ definované vztahem

$$\varrho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

- Pravidlo ϱ , které dvojici bodů přiřazuje jejich Euklidovskou vzdálenost se nazývá **euklidovská metrika**.
- Množina \mathbb{R}^2 s euklidovskou metrikou definovanou pro každé dva body z \mathbb{R}^2 se nazývá **euklidovský metrický prostor** a značí se \mathbb{E}^2 .

Euklidovská vzdálenost dvou bodů je rovna délce úsečky, která tyto body spojuje:



Analogicky se definuje euklidovská vzdálenost v \mathbb{R}^n a vícerozměrné euklidovské prostory \mathbb{E}^n . Například euklidovská vzdálenost bodů

$A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3, B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ je definována vztahem

$$\rho(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Příklad (Euklidovská vzdálenost bodů)

Určete euklidovskou vzdálenost bodů

① $A = (2, 1), B = (3, 4)$

$$\rho(A, B) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

② $A = (2, 1, 3), B = (0, 1, 4)$

$$\rho(A, B) = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 1)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{4 + 0 + 1} = \sqrt{5}$$

Věta (Vlastnosti euklidovské metriky)

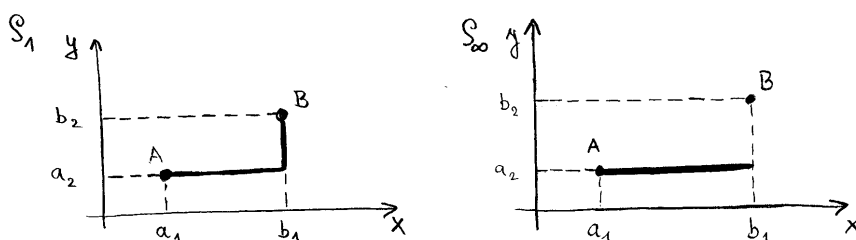
Pro libovolné body $A, B, C \in \mathbb{E}^n$ platí:

- ① $\rho(A, B) = 0 \iff A = B$ (totožnost)
- ② $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ (symetrie)
- ③ $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$ (trojúhelníková nerovnost)

Vzdálenost dvou bodů se často definuje i jiným způsobem, pomocí jiné metriky než euklidovské. Přitom se zcela přirozeně požaduje, aby každá metrika, která definuje vzdálenost, měla vlastnosti uvedené v předchozí větě. Například:

$$\rho_1(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|,$$

$$\rho_\infty(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$



Poznamenejme, že v \mathbb{R} definují uvedené metriky $\rho, \rho_1, \rho_\infty$ stejnou vzdálenost (jsou totožné).

Definice (Okolí bodu)

Nechť $A \in \mathbb{E}^n$, $\varepsilon > 0$ je reálné číslo.

- ε -okolím $O_\varepsilon(A)$ bodu A rozumíme množinu všech bodů, které mají od daného bodu A vzdálenost menší než ε , tj.

$$O_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{E}^n : \varrho(X, A) < \varepsilon\}.$$

- **Ryzím (redukovaným, prstencovým) ε -okolím $\hat{O}_\varepsilon(A)$ bodu A rozumíme množinu**

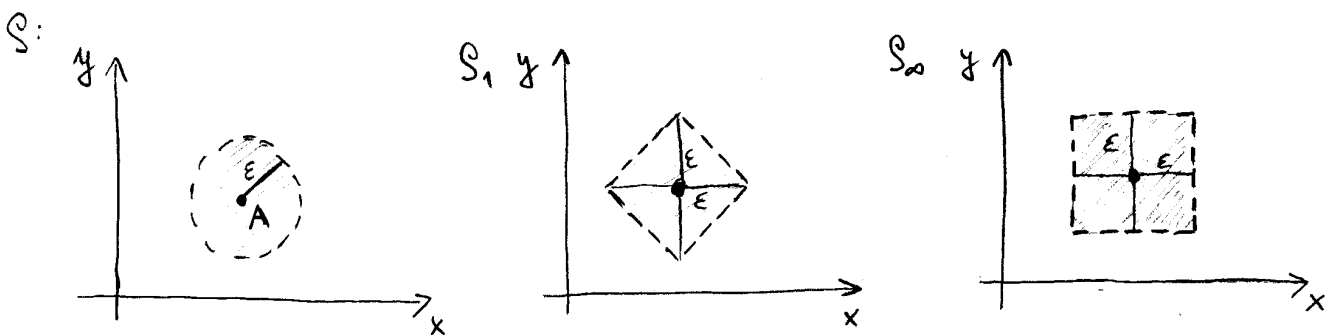
$$\hat{O}_\varepsilon(A) = O_\varepsilon(A) \setminus \{A\}.$$

Nebude-li poloměr okolí podstatný, budeme index ε vynechávat.

- ε -okolí bodu $A \in \mathbb{E}^2$ je množina všech bodů uvnitř kruhu se středem v bodě A a poloměrem ε
- ε -okolí bodu $A \in \mathbb{E}^3$ je množina všech bodů uvnitř koule se středem v bodě A a poloměrem ε

Pokud bychom uvažovali jinou metriku než euklidovskou, potom by okolí mělo jiný tvar, například volbou metriky ϱ_∞ dostáváme čtvercové, resp. krychlové okolí.

ε -okolí v metrikách $\varrho, \varrho_1, \varrho_\infty$:



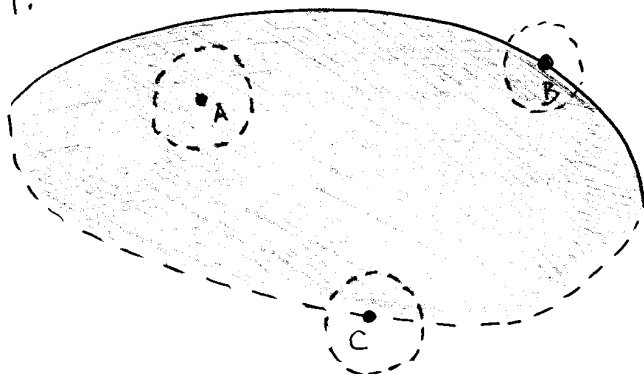
V dalším budeme vzdálenost chápat jako euklidovskou.

Význačné body a množiny bodů

Nechť $M \subseteq \mathbb{E}^n$ je neprázdná množina bodů.

- Bod $A \in M$ se nazývá **vnitřní bod** množiny M , jestliže existuje okolí tohoto bodu, které celé patří do množiny M . Množina všech vnitřních bodů množiny M se nazývá **vnitřek** množiny M .
- Bod A se nazývá **hraniční bod** množiny M , jestliže v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod, který patří do množiny M a zároveň alespoň jeden bod, který nepatří do množiny M . Množina všech hraničních bodů množiny M se nazývá **hranice** množiny M . Hraniční body nemusí patřit do množiny.

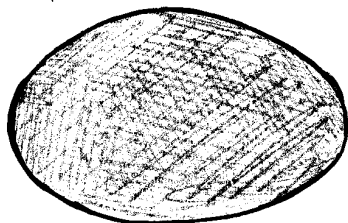
M :



- * A je vnitřní bod
- * $B \in M$ je hraniční bod
- * $C \notin M$ je hraniční bod

- Množina M se nazývá **otevřená**, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M se nazývá **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hraniční body.

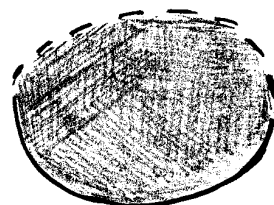
M_1



M_2

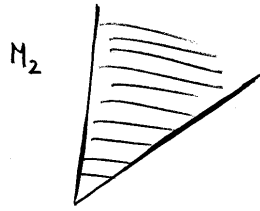
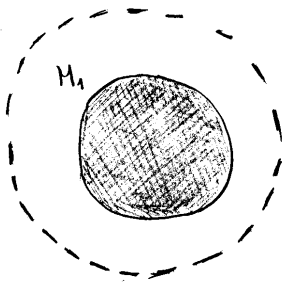


M_3



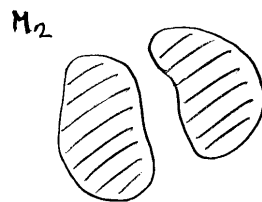
- * M_1 je uzavřená
- * M_2 je otevřená
- * M_3 není ani uzavřená ani otevřená

- Množina M se nazývá **ohraničená (omezená)**, jestliže leží v okolí (libovolně velkém) nějakého bodu z \mathbb{E}^n .



- * M_1 je ohraničená
- * M_2 není ohraničená

- Množina M se nazývá **souvislá**, jestliže každé dva body z této množiny lze spojit lomenou čarou, která celá leží v M .
- Otevřená a souvislá množina se nazývá **oblast**, uzavřená a souvislá množina se nazývá **uzavřená oblast**.



- * M_1 je souvislá
- * M_2 není souvislá

Funkce dvou proměnných

Definice (Funkce dvou proměnných)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$ je neprázdná množina. Pravidlo f , které každému prvku $(x, y) \in M$ přiřazuje právě jeden prvek $z \in \mathbb{R}$, se nazývá **funkce dvou proměnných**. Píšeme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nebo explicitně $z = f(x, y)$.

- Množina M se nazývá **definiční obor** funkce f a značí se $D(f)$.
- Množina všech $z \in \mathbb{R}$, pro něž existuje bod $(x, y) \in M$ takový, že $z = f(x, y)$, se nazývá **obor hodnot** funkce f a značí se $H(f)$.
- Proměnné x, y se nazývají **nezávislé proměnné**, z se nazývá **závislá proměnná**.

Každá funkce je jednoznačně určena svým definičním oborem a funkčním předpisem (tj. předpisem, který každému bodu (x, y) z definičního oboru přiřazuje funkční hodnotu $f(x, y)$).

Pokud není definiční obor zadán a funkční předpis je dán vzorcem, pak definičním oborem rozumíme množinu všech $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro něž má daný vzorec smysl.

Definiční obor funkce zobrazujeme jako množinu bodů v rovině xy .

Příklad

Určete definiční obor funkce $z = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(x-y+2)}$ a zakreslete v rovině xy .

Řešení: Body z definičního oboru musí splňovat následující tři podmínky:

①

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

②

$$\ln(x - y + 2) \neq 0$$

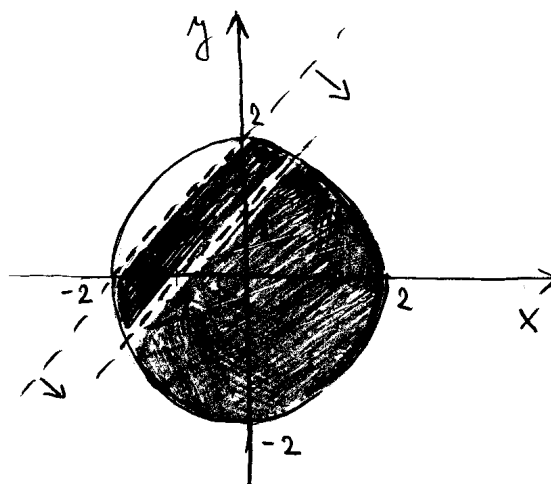
$$x - y + 2 \neq 1$$

$$y \neq x + 1$$

③

$$x - y + 2 > 0$$

$$y < x + 2$$



Grafické znázornění funkce dvou proměnných

Definice (Graf funkce)

Grafem funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ rozumíme množinu všech uspořádaných trojic $(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3$, kde $(x, y) \in D(f)$.

- Grafem funkce dvou proměnných je množina bodů v trojrozměrném prostoru, obvykle nějaká plocha.
- Pro získání představy, jaký je tvar této plochy nám pomohou řezy význačnými rovinami - souřadnicové roviny ($x = 0, y = 0, z = 0$) a roviny s nimi rovnoběžné, především řezy rovinami $z = c, c \in \mathbb{R}$.

Definice (Vrstevnice funkce)

Vrstevnicí funkce $z = f(x, y)$ na úrovni c rozumíme množinu všech bodů $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pro které $f(x, y) = c$.

Příklad (Rovina)

Určete vrstevnice funkce $z = 3 - 2x - y$ a nakreslete graf.

- Vrstevnice:

$$3 - 2x - y = c, \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 3 - 2x - c$$

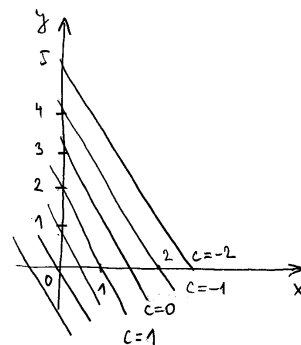
$$c = -1: \quad y = 4 - 2x$$

$$c = 0: \quad y = 3 - 2x$$

$$c = 1: \quad y = 2 - 2x$$

$$c = 2: \quad y = 1 - 2x$$

⋮

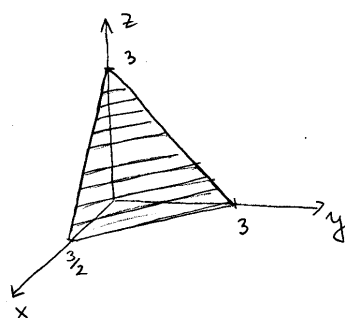


- Graf - určíme průsečíky se souřadnými osami:

$$x = 0, \quad y = 0 \Rightarrow z = 3$$

$$x = 0, \quad z = 0 \Rightarrow y = 3$$

$$y = 0, \quad z = 0 \Rightarrow x = 3/2$$



Příklad (Paraboloid)

Určete vrstevnice funkce $z = x^2 + y^2$.

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \geq 0 \Rightarrow \text{kružnice}$$

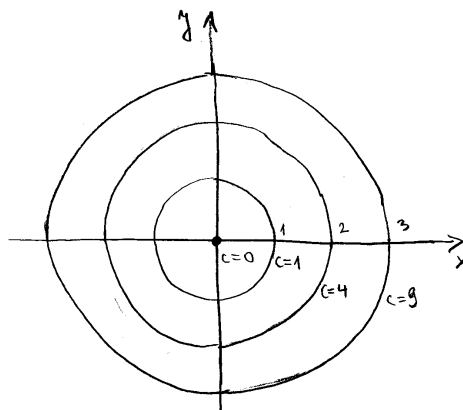
$$c = 0: \quad (0, 0)$$

$$c = 1: \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$c = 4: \quad x^2 + y^2 = 4$$

$$c = 9: \quad x^2 + y^2 = 9$$

⋮



Příklad (Kužel)

Určete vrstevnice funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c, \quad c \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2 \Rightarrow \text{kružnice}$$

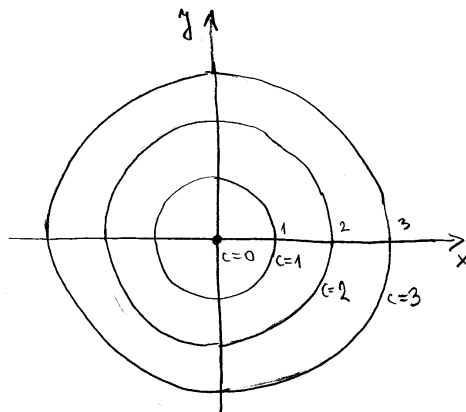
$$c = 0: \quad (0, 0)$$

$$c = 1: \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$c = 2: \quad x^2 + y^2 = 4$$

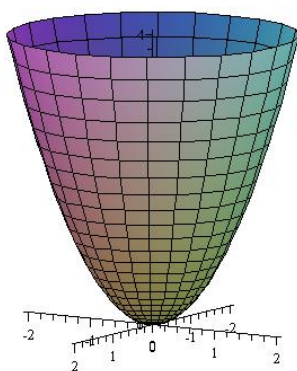
$$c = 3: \quad x^2 + y^2 = 9$$

⋮

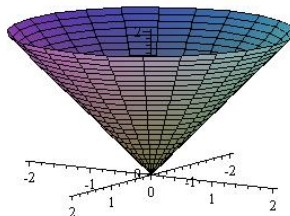


Grafy některých funkcí

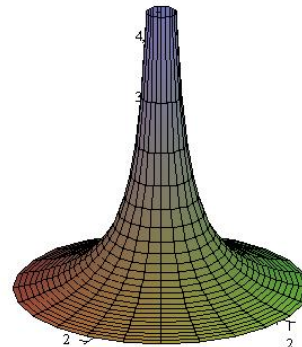
$$z = x^2 + y^2$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

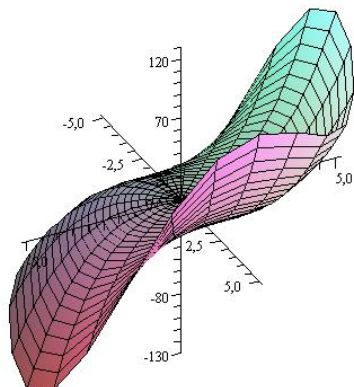


$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

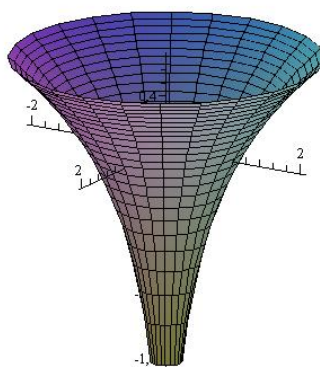


Grafy některých funkcí

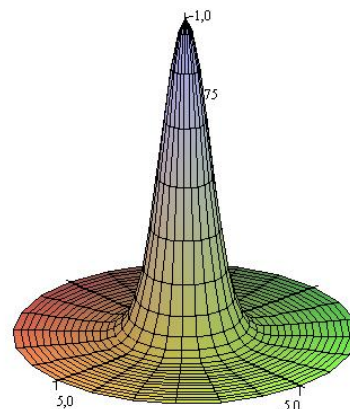
$$z = x^3 + y^3$$



$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

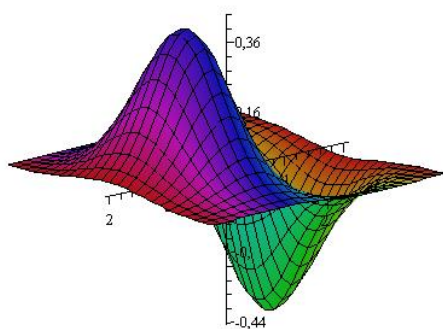


$$z = e^{-x^2 - y^2}$$

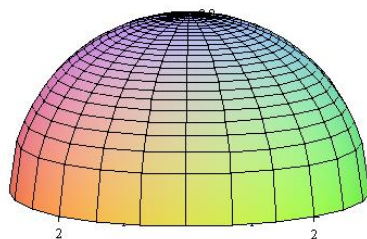


Grafy některých funkcí

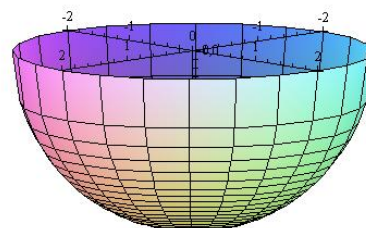
$$z = xe^{-x^2 - y^2}$$



$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$



$$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$



Limita funkce dvou proměnných

Definice (Limita funkce)

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce definovaná v nějakém ryzím okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) **limitu** rovnu číslu $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechny body (x, y) z ryzího δ -okolí bodu (x_0, y_0) platí $|f(x, y) - L| < \varepsilon$. Píšeme

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Bod (x_0, y_0) se nazývá **limitní bod**.

Podobně jako pro funkci jedné proměnné je možné definovat i nevlastní limity a limity v nevlastních bodech. (Za nevlastní bod považujeme bod, jehož alespoň jedna souřadnice je nevlastní.)

Vlastnosti limit

Pro limitu funkce dvou proměnných platí podobná tvrzení jako pro limitu funkce jedné proměnné.

- Funkce nemusí být v bodě (x_0, y_0) definovaná a může zde mít limitu.
- Funkce může mít v bodě nejvýše jednu limitu.
- Limita součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí je rovna součtu, rozdílu, součinu a podílu limit jednotlivých funkcí (za předpokladu, že všechny limity existují a příslušné operace jsou definovány, tj. nejedná se o neurčité výrazy.)

Výpočet limity funkce dvou proměnných je mnohem obtížnější než u funkce jedné proměnné:

- U funkce jedné proměnné se k limitnímu bodu můžeme blížit jen po přímce ze dvou stran, u funkce dvou proměnných se můžeme blížit z nekonečně mnoha různých směrů po různých křivkách. Existují-li dvě různé cesty vedoucí k různým hodnotám limity, pak limita v daném bodě neexistuje.
- Neexistuje žádná analogie l'Hospitalova pravidla.

Spojitosť funkce

Definice (Spojitost funkce)

- Řekneme, že funkce dvou proměnných f je **spojitá v bodě** (x_0, y_0) , jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

- Řekneme, že funkce dvou proměnných f je **spojitá na množině** $M \subseteq \mathbb{R}^2$, jestliže pro každý bod $(x_0, y_0) \in M$ platí

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0), \quad \text{kde } (x,y) \in M.$$

- Je-li funkce v daném bodě spojitá, musí být v tomto bodě definovaná.
- Body, v nichž není funkce spojitá, se nazývají **body nespojitosti**.
- Součet, rozdíl a součin funkcí spojitých v bodě (x_0, y_0) je funkce spojitá v bodě (x_0, y_0) . Podíl dvou funkcí spojitých v bodě (x_0, y_0) je funkce spojitá v bodě (x_0, y_0) , pokud (x_0, y_0) není nulovým bodem jmenovatele.

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova)

Nechť funkce dvou proměnných f je spojitá na ohraničené a uzavřené množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak f nabývá na M své největší a nejmenší hodnoty.

Důsledek: Funkce, která je spojitá na ohraničené a uzavřené množině, je na této množině ohraničená.

Věta (Bolzanova)

Nechť funkce dvou proměnných f je spojitá na souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$ a nechť pro dva body $A, B \in M$ platí $f(A) \neq f(B)$. Pak ke každému číslu c ležícímu mezi $f(A)$ a $f(B)$ existuje $C \in M$ tak, že $f(C) = c$.

Důsledek: Nechť funkce dvou proměnných f je spojitá na souvislé množině $M \subset \mathbb{R}^2$ a nechť pro dva body $A, B \in M$ platí $f(A) \cdot f(B) < 0$. Pak existuje $C \in M$ tak, že $f(C) = 0$.

Využití systémů počítačové algebry

- Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:
<http://user.mendelu.cz/marik/akademie/>
- Matematické výpočty online (MAW) - definiční obory:
<http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=df3d>

Příklad

Určete definiční obor, vrstevnice a nakreslete graf pro $x \in [-3, 3]$ a $y \in [-10, 10]$ funkce

$$y = \sqrt{x^2 - y}.$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (<http://www.wolframalpha.com/>):

- Definiční obor:
`domain sqrt(x^2-y)`
- Vrstevnice:
`contour plot sqrt(x^2-y)`
- Graf (viz „real part“):
`graph sqrt(x^2-y) for x from -3 to 3, y from -10 to 10`