



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Vyšší matematika, Inženýrská matematika

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Definice (LDR druhého řádu)

Nechť p , q a f jsou funkce definované a spojité na otevřeném intervalu I .
Diferenciální rovnice

$$(L2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

se nazývá **lineární diferenciální rovnice druhého řádu**.

- Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, pak se rovnice (L2) nazývá **homogenní**, v opačném případě se nazývá **nehomogenní**.
- Je-li (L2) nehomogenní rovnice, pak se rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

která vznikne z rovnice (L2) nahrazením pravé strany $f(x)$ nulovou funkcí, nazývá **homogenní rovnice příslušná nehomogenní rovnici (L2)**.

Definice (Řešení LDR druhého řádu)

Řešením rovnice (L2) na intervalu I rozumíme funkci $y = y(x)$, která rovnici (L2) na I splňuje.

- Všechna řešení rovnice (L2) lze vyjádřit ve tvaru obsahujícím dvě nezávislé konstanty $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Takový předpis se nazývá **obecné řešení**.
- **Partikulárním řešením** rozumíme jednu konkrétní funkci, která na I rovnici splňuje.
- Nechť $x_0 \in I, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Úloha nalézt řešení rovnice, které splňuje v bodě x_0 tzv. **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

se nazývá **počáteční úloha**. Řešením počáteční úlohy je partikulární řešení.

Některé vlastnosti LDR druhého řádu

Věta (Jednoznačnost řešení počáteční úlohy)

Nechť p, q, f jsou spojité na otevřeném intervalu I , $x_0 \in I, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Pak každá počáteční úloha

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

má jediné řešení definované na celém I .

Poznámka (Vlastnosti homogenní rovnice)

- ① Homogenní LDR druhého řádu má vždy tzv. **triviální řešení** $y = 0$. (Lze ověřit dosazením do rovnice.)
- ② Linearita = aditivita + homogenita
 - Aditivita: Jsou-li y_1 a y_2 dvě řešení homogenní rovnice, pak jejich součet $y_1 + y_2$ je také řešením této homogenní rovnice.
 - Homogenita: Je-li y řešení homogenní rovnice, pak také konstatní násobek cy , kde $c \in \mathbb{R}$, je řešením této rovnice.

Obecně: Jsou-li y_1 a y_2 dvě řešení homogenní rovnice, pak jejich lineární kombinace $c_1y_1 + c_2y_2$, kde $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$, je také řešením této homogenní rovnice.

Homogenní LDR druhého řádu

Definice (Lineárně nezávislé funkce)

Nechť y_1, y_2 jsou funkce definované na intervalu I . Jestliže existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že

$$y_1(x) = ky_2(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

říkáme, že funkce y_1, y_2 jsou **lineárně závislé**. V opačném případě říkáme, že funkce y_1, y_2 jsou **lineárně nezávislé**.

Homogenní LDR druhého řádu

Věta (Obecné řešení homogenní LDR druhého řádu)

Nechť y_1, y_2 jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

na intervalu I . Pak

$$y(x, c_1, c_2) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$$

je obecné řešení této rovnice na I .

Poznámka

Dvojice lineárně nezávislých řešení y_1, y_2 homogenní LDR druhého řádu tvoří tzv. **fundamentální systém řešení** této rovnice.

Nehomogenní LDR druhého řádu

Věta (Obecné řešení nehomogenní LDR druhého řádu)

Nechť y_p je libovolné partikulární řešení rovnice (L2) na I a necht' y_h je obecné řešení příslušné homogenní rovnice na I . Pak obecné řešení nehomogenní lineární rovnice (L2) na I lze vyjádřit ve tvaru

$$y(x, c_1, c_2) = y_h(x, c_1, c_2) + y_p(x),$$

tj.

$$y(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x),$$

kde y_1, y_2 jsou dvě lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice na I , $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Nehomogenní LDR druhého řádu

K nalezení obecného řešení nehomogenní LDR druhého řádu stačí najít

- (a) dvě lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice
- (b) libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice

Nalezením řešení LDR druhého řádu se budeme zabývat pouze v jednom speciálním případě – v případě, kdy funkce p, q v rovnici (L2) budou konstantní. Dále budeme tedy uvažovat **lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty**, tj. rovnici

$$(L2c) \quad y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

(a) Homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

Uvažujme homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

$$(LH2c) \quad y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

a přiřadíme jí kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Tato kvadratická rovnice se nazývá **charakteristická rovnice** pro rovnici (LH2c).

Poznámka

Funkce $e^{\lambda x}$ je řešením rovnice (LH2c) právě tehdy, když λ je řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

Věta (Obecné řešení homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty)

Nechť $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ je charakteristická rovnice pro rovnici (LH2c).

- *Jsou-li λ_1, λ_2 dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, pak definujeme*

$$\boxed{y_1(x) = e^{\lambda_1 x}}, \quad \boxed{y_2(x) = e^{\lambda_2 x}}.$$

- *Je-li λ dvojnásobný reálný kořen charakteristické rovnice, pak definujeme*

$$\boxed{y_1(x) = e^{\lambda x}}, \quad \boxed{y_2(x) = x e^{\lambda x}}.$$

- *Je-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ dvojice komplexně sdružených kořenů charakteristické rovnice, pak definujeme*

$$\boxed{y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)}, \quad \boxed{y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)}.$$

Ve všech třech případech jsou funkce y_1, y_2 lineárně nezávislá řešení rovnice (LH2c) (tvoří fundamentální systém řešení) a obecné řešení této rovnice je tedy tvaru

$$y_h(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Homogenní rovnice 1)

Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = -3 \pm 2i$$

Dvě lineárně nezávislá řešení:

$$y_1 = e^{-3x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{-3x} \sin 2x$$

Obecné řešení:

$$y = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Homogenní rovnice 2)

Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2$$

Dvě lineárně nezávislá řešení:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = xe^{2x}$$

Obecné řešení:

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Homogenní rovnice 3)

Najděte řešení počáteční úlohy $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

Dvě lineárně nezávislá řešení:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-2x}$$

Obecné řešení:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Řešení počáteční úlohy:

$$y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} y(0) = 2 : \quad 2 &= c_1 + c_2 \\ y'(0) = 3 : \quad 3 &= 2c_1 - 2c_2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{7}{4}, c_2 = \frac{1}{4}$$

Řešení počáteční úlohy:

$$y = \frac{7}{4} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2x}$$

(b) Nalezení partikulárního řešení nehomogenní LDR s konst. koeficienty – metoda variace konstant

Věta (Variace konstant)

Nechť y_1, y_2 jsou lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice (LH2c), tj. $y_h(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ je obecné řešení rovnice (LH2c). Pak partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$(L2c) \quad y'' + py' + qy = f(x)$$

je tvaru

$$y_p(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x).$$

(Konstanty c_1, c_2 ve vzorci pro řešení příslušné homogenní rovnice nahradíme funkcemi $K_1(x), K_2(x)$.) Přitom funkce $K_1(x), K_2(x)$ mají derivace $K_1'(x), K_2'(x)$, které splňují soustavu

$$\begin{aligned} K_1'(x)y_1(x) + K_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ K_1'(x)y_1'(x) + K_2'(x)y_2'(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Poznámka (Nalezení funkcí $K_1(x)$, $K_2(x)$)

Soustava z předchozí věty má vždy jediné řešení a lze ji řešit například Cramerovým pravidlem. Soustavu lze ekvivalentně vyjádřit v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1'(x) \\ K_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Vypočteme determinant matice soustavy W a dva pomocné determinanty W_1 , W_2 :

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Pak

$$K_1'(x) = \frac{W_1}{W}, \quad K_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

a následně

$$K_1(x) = \int K_1'(x) dx, \quad K_2(x) = \int K_2'(x) dx.$$

Determinant W se nazývá **wronskián**.

Příklad (Variace konstant)

Metodou variace konstant najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \implies y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice: $y_p = K_1(x)e^{-x} + K_2(x)e^{2x}$

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1'(x) \\ k_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$W = 2e^x + e^x = 3e^x, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^{2x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{4x}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{2x} \end{vmatrix} = e^x$$

$$K_1'(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} \implies K_1(x) = -\frac{1}{9}e^{3x}, \quad K_2'(x) = \frac{1}{3} \implies K_2(x) = \frac{1}{3}x$$

$$\implies y_p = -\frac{1}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$$

(b) Nalezení partikulárního řešení nehomogenní LDR se speciální pravou stranou – metoda neurčitých koeficientů

V některých speciálních případech je výhodnější místo obecné metody variace konstant použít alternativní metodu nalezení partikulárního řešení rovnice (L2c).

- ① Nechť pravá strana rovnice (L2c) je tvaru $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a P je polynom. Pak partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} R(x),$$

kde

- k je násobnost čísla α jakožto kořene charakteristické rovnice pro příslušnou homogenní rovnici (LH2c), tj.
 - $k = 0$ pokud α není kořenem charakteristické rovnice,
 - $k = 1$ pokud α je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice,
 - $k = 2$ pokud α je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice
- R je polynom stejného stupně jako polynom P .

- ② Nechť pravá strana rovnice (L2c) je tvaru

$f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x))$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a P_n, Q_m jsou polynomy stupně n , resp. m . Pak partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} (R(x) \cos(\beta x) + S(x) \sin(\beta x)),$$

kde

- k je násobnost čísla $\alpha + \beta i$ jakožto kořene charakteristické rovnice pro příslušnou homogenní rovnici (LH2c), tj.
 - $k = 0$ pokud $\alpha + \beta i$ není kořenem charakteristické rovnice,
 - $k = 1$ pokud $\alpha + \beta i$ je kořenem charakteristické rovnice,
- R a S jsou polynomy stejného stupně, který je roven $\max(n, m)$.

Poznámka

I v případě, kdy jeden z polynomů P_n nebo Q_m je nulový (tj. na pravé straně rovnice chybí sinus nebo kosinus), je potřeba do vzorce pro y_p dosadit oba polynomy R i S (a tedy obě funkce sinus i kosinus).

V obou uvedených případech postupujeme tak, že napíšeme tvar partikulárního řešení y_p s neurčitými koeficienty daných polynomů.

(Víme-li například, že polynom R má být stupně 2, pak do vzorce pro y_p dosadíme $R(x) = ax^2 + bx + c$.)

Tvar řešení y_p dosadíme do rovnice (L2c) a porovnáním levé a pravé strany nalezneme hledané koeficienty. (Určíme konkrétní hodnoty koeficientů a , b , c .)

Příklad (Metoda neurčitých koeficientů 1)

Metodou neurčitých koeficientů najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

Obecné řešení homogenní rovnice: $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ ($\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$)

Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$P(x) = 1, \alpha = 2 \text{ (jednoduchý kořen char. rovnice)} \implies y_p = axe^{2x}$$

Je potřeba najít konstantu a :

$$y'_p = ae^{2x} + 2axe^{2x}$$

$$y''_p = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x} = 4ae^{2x} + 4axe^{2x}$$

Dosadíme y_p , y'_p , y''_p do rovnice:

$$4ae^{2x} + 4axe^{2x} - (ae^{2x} + 2axe^{2x}) - 2axe^{2x} = e^{2x}$$

$$3ae^{2x} = e^{2x} \implies a = \frac{1}{3} \implies y_p = \frac{1}{3}xe^{2x}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$

Příklad (Metoda neurčitých koeficientů 2)

Metodou neurčitých koeficientů najděte obecné řešení rovnice $y'' + y = \sin x$.

Obecné řešení homogenní rovnice:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm i, \implies y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$P(x) = 0, Q(x) = 1, \alpha + \beta i = i \text{ (kořen char. rce)} \implies y_p = x(a \cos x + b \sin x)$$

Je potřeba najít konstanty a a b :

$$y'_p = a \cos x + b \sin x + x(-a \sin x + b \cos x)$$

$$y''_p = -a \sin x + b \cos x - a \sin x + b \cos x + x(-a \cos x - b \sin x)$$

Dosadíme y_p , y'_p , y''_p do rovnice:

$$-2a \sin x + 2b \cos x + x(-a \cos x - b \sin x) + x(a \cos x + b \sin x) = \sin x$$

$$-2a \sin x + 2b \cos x = \sin x \implies a = -\frac{1}{2}, b = 0 \implies y_p = -\frac{1}{2}x \cos x$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2}x \cos x$$