Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Vyšší matematika, Inženýrská matematika

LDF MENDELU

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

Definice (LDR druhého řádu)

Nechť p, q a f jsou funkce definované a spojité na otevřeném intervalu I. Diferenciální rovnice

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{L2}$$

se nazývá lineární diferenciální rovnice druhého řádu.

- Je-li $f(x) = 0$ pro všechna $x \in I$, pak se rovnice (L2) nazývá homogenní, v opačném případě se nazývá nehomogenní.
- Je-li (L2) nehomogenní rovnice, pak se rovnice

  $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

  která vznikne z rovnice (L2) nahrazením pravé strany $f(x)$ nulovou funkcí, nazývá homogenní rovnice příslušná nehomogenní rovnici (L2).

Definice (Řešení LDR druhého řádu)

Řešením rovnice (L2) na intervalu I rozumíme funkci $y = y(x)$, která rovnici (L2) na I splňuje.

- Všechna řešení rovnice (L2) lze vyjádřit ve tvaru obsahujícím dvě nezávislé konstanty c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Takový předpis se nazývá obecné řešení.
- Partikulárním řešením rozumíme jednu konkrétní funkci, která na I rovnici splňuje.
- Nechť $x_0 \in I, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Úloha nalézt řešení rovnice, které splňuje v bodě x_0 tzv. počáteční podmínky

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

se nazývá počáteční úloha. Řešením počáteční úlohy je partikulární řešení.

Některé vlastnosti LDR druhého řádu

Věta (Jednoznačnost řešení počáteční úlohy)

Nechť p, q, f *jsou spojité na otevřeném intervalu* I, $x_0 \in I, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. *Pak každá počáteční úloha*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

má jediné řešení definované na celém I.

Poznámka (Vlastnosti homogenní rovnice)

1. Homogenní LDR druhého řádu má vždy tzv. triviální řešení $y = 0$. (Lze ověřit dosazením do rovnice.)

2. Linearita = aditivita + homogenita

   - Aditivita: Jsou-li y_1 a y_2 dvě řešení homogenní rovnice, pak jejich součet $y_1 + y_2$ je také řešením této homogenní rovnice.

   - Homogenita: Je-li y řešení homogenní rovnice, pak také konstatní násobek cy, kde $c \in \mathbb{R}$, je řešením této rovnice.

   Obecně: Jsou-li y_1 a y_2 dvě řešení homogenní rovnice, pak jejich lineární kombinace $c_1 y_1 + c_2 y_2$, kde $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$, je také řešením této homogenní rovnice.

Homogenní LDR druhého řádu

Definice (Lineárně nezávislé funkce)

Nechť y_1, y_2 jsou funkce definované na intervalu I. Jestliže existuje číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že

$$y_1(x) = ky_2(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

říkáme, že funkce y_1, y_2 jsou lineárně závislé. V opačném případě říkáme, že funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé.

Homogenní LDR druhého řádu

Věta (Obecné řešení homogenní LDR druhého řádu)

Nechť y_1, y_2 *jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

na intervalu I. *Pak*

$$\boxed{y(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}}$$

je obecné řešení této rovnice na I.

Poznámka

Dvojice lineárně nezávislých řešení y_1, y_2 homogenní LDR druhého řádu tvoří tzv. fundamentální systém řešení této rovnice.

Nehomogenní LDR druhého řádu

Věta (Obecné řešení nehomogenní LDR druhého řádu)

Nechť y_p *je libovolné partikulární řešení rovnice (L2) na* I *a nechť* y_h *je obecné řešení příslušné homogenní rovnice na* I*. Pak obecné řešení nehomogenní lineární rovnice (L2) na* I *lze vyjádřit ve tvaru*

$$\boxed{y(x, c_1, c_2) = y_h(x, c_1, c_2) + y_p(x)},$$

tj.

$$\boxed{y(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)},$$

kde y_1, y_2 *jsou dvě lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice na* I*,* $c_1 \in \mathbb{R},\ c_2 \in \mathbb{R}$*.*

Nehomogenní LDR druhého řádu

K nalezení obecného řešení nehomogenní LDR druhého řádu stačí najít

(a) dvě lineárně nezávislá řešení příslušné homogenní rovnice

(b) libovolné partikulární řešení nehomogenní rovnice

Nalezením řešení LDR druhého řádu se budeme zabývat pouze v jednom speciálním případě – v případě, kdy funkce p, q v rovnici (L2) budou konstantní. Dále budeme tedy uvažovat lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty, tj. rovnici

(L2c) $$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

(a) Homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

Uvažujme homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty

(LH2c) $$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

a přiřaďme jí kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Tato kvadratická rovnice se nazývá charakteristická rovnice pro rovnici (LH2c).

Poznámka

Funkce $e^{\lambda x}$ je řešením rovnice (LH2c) právě tehdy, když λ je řešením charakteristické rovnice $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

Věta (Obecné řešení homogenní LDR 2. řádu s konstantními koeficienty)

Nechť $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ *je charakteristická rovnice pro rovnici (LH2c).*

- *Jsou-li* λ_1, λ_2 *dva různé reálné kořeny charakteristické rovnice, pak definujme*

$$\boxed{y_1(x) = e^{\lambda_1 x}}, \quad \boxed{y_2(x) = e^{\lambda_2 x}}.$$

- *Je-li* λ *dvojnásobný reálný kořen charakteristické rovnice, pak definujme*

$$\boxed{y_1(x) = e^{\lambda x}}, \quad \boxed{y_2(x) = x e^{\lambda x}}.$$

- *Je-li* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ *dvojice komplexně sdružených kořenů charakteristické rovnice, pak definujme*

$$\boxed{y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)}, \quad \boxed{y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)}.$$

Ve všech třech případech jsou funkce y_1, y_2 *lineárně nezávislá řešení rovnice (LH2c) (tvoří fundamentální systém řešení) a obecné řešení této rovnice je tedy tvaru*

$$y_h(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Homogenní rovnice 1)

Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Příklad (Homogenní rovnice 1)

Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = -3 \pm 2i$$

Dvě lineárně nezávislá řešení:

$$y_1 = e^{-3x} \cos 2x, \quad y_2 = e^{-3x} \sin 2x$$

Obecné řešení:

$$y = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x), \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Homogenní rovnice 2)

Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Příklad (Homogenní rovnice 2)

Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Charakteristická rovnice:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 4\lambda + 4 &= 0 \\ (\lambda - 2)^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 2 \end{aligned}$$

Dvě lineárně nezávislá řešení:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = xe^{2x}$$

Obecné řešení:

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2 x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Příklad (Homogenní rovnice 3)

Najděte řešení počáteční úlohy $y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$

Příklad (Homogenní rovnice 3)

Najděte řešení počáteční úlohy $y'' - 4y = 0$, $\quad y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

Dvě lineárně nezávislá řešení:

$$y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-2x}$$

Obecné řešení:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Řešení počáteční úlohy:

$$y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} y(0) = 2: &\quad 2 = c_1 + c_2 \\ y'(0) = 3: &\quad 3 = 2c_1 - 2c_2 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = \frac{7}{4}, c_2 = \frac{1}{4}$$

Řešení počáteční úlohy:

$$y = \frac{7}{4} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2x}$$

(b) Nalezení partikulárního řešení nehomogenní LDR s konst. koeficienty – metoda variace konstant

Věta (Variace konstant)

Nechť y_1, y_2 *jsou lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice (LH2c), tj.* $y_h(x, c_1, c_2) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ *je obecné řešení rovnice (LH2c). Pak partikulární řešení nehomogenní rovnice*

(L2c) $$y'' + py' + qy = f(x)$$

je tvaru

$$y_p(x) = K_1(x) y_1(x) + K_2(x) y_2(x).$$

(Konstanty c_1, c_2 *ve vzorci pro řešení příslušné homogenní rovnice nahradíme funkcemi* $K_1(x), K_2(x)$*.) Přitom funkce* $K_1(x), K_2(x)$ *mají derivace* $K_1'(x), K_2'(x)$*, které splňují soustavu*

$$\begin{aligned} K_1'(x) y_1(x) + K_2'(x) y_2(x) &= 0 \\ K_1'(x) y_1'(x) + K_2'(x) y_2'(x) &= f(x). \end{aligned}$$

Poznámka (Nalezení funkcí $K_1(x)$, $K_2(x)$)

Soustava z předchozí věty má vždy jediné řešení a lze ji řešit například Cramerovým pravidlem. Soustavu lze ekvivalentně vyjádřit v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1'(x) \\ K_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Vypočteme determinant matice soustavy W a dva pomocné determinanty W_1, W_2:

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

Pak

$$K_1'(x) = \frac{W_1}{W}, \quad K_2'(x) = \frac{W_2}{W}$$

a následně

$$K_1(x) = \int K_1'(x)\,\mathrm{d}x, \quad K_2(x) = \int K_2'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Determinant W se nazývá wronskián.

Příklad (Variace konstant)

Metodou variace konstant najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

Příklad (Variace konstant)

Metodou variace konstant najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

Obecné řešení homogenní rovnice:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2 \implies y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice: $y_p = K_1(x)e^{-x} + K_2(x)e^{2x}$

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1'(x) \\ k_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$W = 2e^x + e^x = 3e^x, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^{2x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{4x}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{2x} \end{vmatrix} = e^x$$

$$K_1'(x) = -\frac{1}{3}e^{3x} \Rightarrow K_1(x) = -\frac{1}{9}e^{3x}, \quad K_2'(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow K_2(x) = \frac{1}{3}x$$

$$\implies y_p = -\frac{1}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice: $\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{1}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}}$

(b) Nalezení partikulárního řešení nehomogenní LDR se speciální pravou stranou – metoda neurčitých koeficientů

V některých speciálních případech je výhodnější místo obecné metody variace konstant použít alternativní metodu nalezení partikulárního řešení rovnice (L2c).

1. Nechť pravá strana rovnice (L2c) je tvaru $\boxed{f(x) = e^{\alpha x} P(x)}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a P je polynom. Pak partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$\boxed{y_p(x) = x^k e^{\alpha x} R(x)},$$

kde

- k je násobnost čísla α jakožto kořene charakteristické rovnice pro příslušnou homogenní rovnici (LH2c), tj.
    - $k = 0$ pokud α není kořenem charakteristické rovnice,
    - $k = 1$ pokud α je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice,
    - $k = 2$ pokud α je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice
- R je polynom stejného stupně jako polynom P.

2. Nechť pravá strana rovnice (L2c) je tvaru $\boxed{f(x) = e^{\alpha x} \left(P_n(x) \cos(\beta x) + Q_m(x) \sin(\beta x)\right)}$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a P_n, Q_m jsou polynomy stupně n, resp. m. Pak partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$\boxed{y_p(x) = x^k e^{\alpha x} \left(R(x) \cos(\beta x) + S(x) \sin(\beta x)\right)},$$

kde

- k je násobnost čísla $\alpha + \beta i$ jakožto kořene charakteristické rovnice pro příslušnou homogenní rovnici (LH2c), tj.
  - $k = 0$ pokud $\alpha + \beta i$ není kořenem charakteristické rovnice,
  - $k = 1$ pokud $\alpha + \beta i$ je kořenem charakteristické rovnice,
- R a S jsou polynomy stejného stupně, který je roven $\max(n, m)$.

Poznámka

I v případě, kdy jeden z polynomů P_n nebo Q_m je nulový (tj. na pravé straně rovnice chybí sinus nebo kosinus), je potřeba do vzorce pro y_p dosadit oba polynomy R i S (a tedy obě funkce sinus i kosinus).

V obou uvedených případech postupujeme tak, že napíšeme tvar partikulárního řešení y_p s neurčitými koeficienty daných polynomů.
(Víme-li například, že polynom R má být stupně 2, pak do vzorce pro y_p dosadíme $R(x) = ax^2 + bx + c$.)

Tvar řešení y_p dosadíme do rovnice (L2c) a porovnáním levé a pravé strany nalezneme hledané koeficienty. (Určíme konkrétní hodnoty koeficientů a, b, c.)

Příklad (Metoda neurčitých koeficientů 1)

Metodou neurčitých koeficientů najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

Příklad (Metoda neurčitých koeficientů 1)

Metodou neurčitých koeficientů najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = e^{2x}$.

Obecné řešení homogenní rovnice: $\quad y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \quad (\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2)$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$$P(x) = 1,\ \alpha = 2 \text{ (jednoduchý kořen char. rovnice)} \implies y_p = axe^{2x}$$

Je potřeba najít konstantu a:

$$\begin{aligned} y_p' &= ae^{2x} + 2axe^{2x} \\ y_p'' &= 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4axe^{2x} = 4ae^{2x} + 4axe^{2x} \end{aligned}$$

Dosadíme y_p, y_p', y_p'' do rovnice:

$$4ae^{2x} + 4axe^{2x} - (ae^{2x} + 2axe^{2x}) - 2axe^{2x} = e^{2x}$$

$$3ae^{2x} = e^{2x} \ \Rightarrow\ a = \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ y_p = \frac{1}{3}xe^{2x}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice: $\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{2x}}$

Příklad (Metoda neurčitých koeficientů 2)

Metodou neurčitých koeficientů najděte obecné řešení rovnice $y'' + y = \sin x$.

Příklad (Metoda neurčitých koeficientů 2)

Metodou neurčitých koeficientů najděte obecné řešení rovnice $y'' + y = \sin x$.

Obecné řešení homogenní rovnice:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm i, \implies y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice:

$P(x) = 0,\ Q(x) = 1,\ \alpha + \beta i = i$ (kořen char. rce) $\implies y_p = x(a \cos x + b \sin x)$

Je potřeba najít konstanty a a b:

$$y_p' = a \cos x + b \sin x + x(-a \sin x + b \cos x)$$
$$y_p'' = -a \sin x + b \cos x - a \sin x + b \cos x + x(-a \cos x - b \sin x)$$

Dosadíme y_p, y_p', y_p'' do rovnice:

$$-2a \sin x + 2b \cos x + x(-a \cos x - b \sin x) + x(a \cos x + b \sin x) = \sin x$$
$$-2a \sin x + 2b \cos x = \sin x \ \Rightarrow\ a = -\frac{1}{2},\ b = 0 \ \Rightarrow\ y_p = -\frac{1}{2} x \cos x$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice: $\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x}$