INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Parciální derivace a diferenciál

Vyšší matematika, Inženýrská matematika

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

Simona Fišnarová

Brno 2014

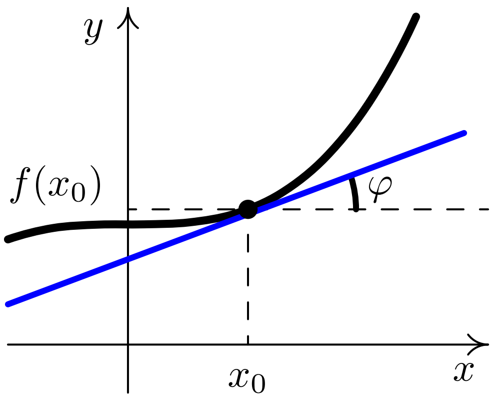
Derivace funkce jedné proměnné a její geometrický význam

Derivace funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je definována jako limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Tato limita udává směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ a vyjadřuje tedy rychlost růstu funkce v bodě x_0.
- Tečna ke grafu funkce f v bodě $(x_0, f(x_0))$ má rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



(směrnice tečny $= \mathrm{tg}\varphi$)

Připomeňme, že pokud má funkce v bodě x_0 vlastní derivaci (výše uvedená limita existuje a je konečná), pak je funkce v bodě x_0 spojitá.

Parciální derivace

Definice (Parciální derivace)

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definovaná v bodě (x_0, y_0) a nějakém jeho okolí.

- Položme $g(x) = f(x, y_0)$. Má-li funkce g derivaci bodě x_0, nazýváme tuto derivaci **parciální derivací** funkce f podle proměnné x **v bodě** (x_0, y_0) a značíme ji $f'_x(x_0, y_0)$. Platí tedy

$$\boxed{f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}}.$$

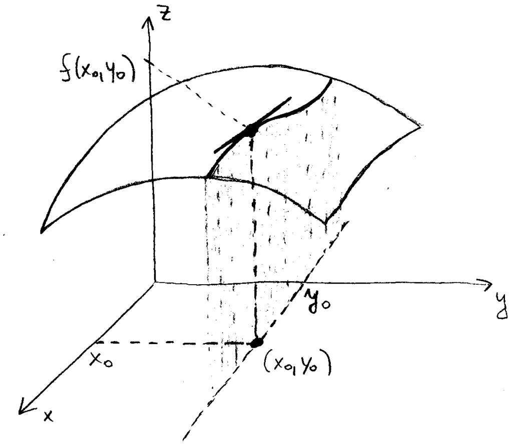
- Podobně položme $h(y) = f(x_0, y)$. Má-li funkce h derivaci bodě y_0, nazýváme tuto derivaci **parciální derivací** funkce f podle proměnné y **v bodě** (x_0, y_0) a značíme ji $f'_y(x_0, y_0)$. Platí tedy

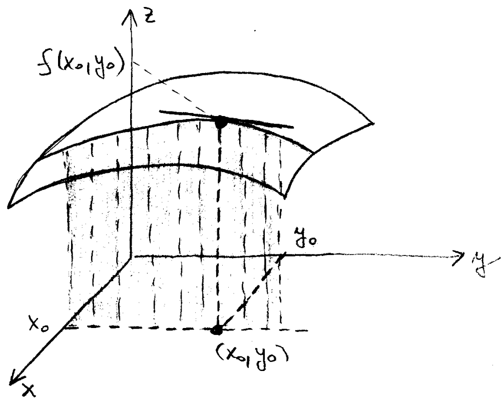
$$\boxed{f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}}.$$

Geometrický význam parciálních derivací

Parciální derivace určují rychlost růstu funkce ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami x a y. (Pozn.: Jsou speciálními případy tvz. směrových derivací, které určují rychlost růstu funkce v libovolném daném směru.)

- Parciální derivace $f'_x(x_0, y_0)$ představuje směrnici tečny v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ke křivce, která vznikne průsečíkem grafu funkce f s rovinou $y = y_0$.
- Podobně parciální derivace $f'_y(x_0, y_0)$ představuje směrnici tečny v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ke křivce, která vznikne průsečíkem grafu funkce f s rovinou $x = x_0$.





Parciální derivace jako funkce

- Má-li funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ parciální derivaci podle proměnné x **ve všech bodech nějaké množiny** $M \subset D(f)$, pak můžeme na této množině definovat funkci, která každému bodu z množiny M přiřadí parciální derivaci podle proměnné x v tomto bodě. Tato funkce se nazývá **parciální derivace funkce** f podle proměnné x a značí se f'_x. Podobně definujeme parciální derivaci podle proměnné y a značíme f'_y.

  Jiná značení parciálních derivací:

$$f_x,\ f_y,\quad \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\quad z'_x,\ z'_y,\quad z_x,\ z_y,\quad \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}$$

- Při výpočtu parciálních derivací se díváme na funkci $f(x, y)$ jako na funkci jedné proměnné:
  - Při výpočtu parciální derivace $f'_x(x, y)$ považujeme x za proměnnou a y za konstantu.
  - Podobně při výpočtu $f'_y(x, y)$ považujeme y za proměnnou a x za konstantu.

  Při výpočtu parciálních derivací tedy používáme stejné vzorce a stejná pravidla jako při derivování funkce jedné proměnné.

Příklad (Výpočet parciálních derivací)

1. $z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \\ z'_y &= 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0 \\ &= 4x^2y + 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

2. $z = x^y,\ x > 0$

$$\begin{aligned} z'_x &= yx^{y-1} \quad \text{(derivujeme jako mocninnou funkci)} \\ z'_y &= x^y \ln x \quad \text{(derivujeme jako exponenciální funkci)} \end{aligned}$$

Souvislost spojitosti s parciálními derivacemi

Z pouhé existence parciálních derivací funkce f v bodě (x_0, y_0) neplyne spojitost funkce f v bodě (x_0, y_0). Například funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $(0, 0)$ obě parciální derivace (platí, že $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$), ale funkce není v bodě $(0, 0)$ spojitá, neboť zde nemá ani limitu. Blížíme-li se totiž k bodu $(0, 0)$ ve směru souřadných os, má funkce stále hodnotu 1, pokud se však blížíme v jiném směru, dostaneme hodnotu 0.

Věta (Postačující podmínka spojitosti)

Nechť funkce dvou proměnných f má v bodě (x_0, y_0) spojité obě parciální derivace. Pak je funkce f v bodě (x_0, y_0) spojitá.

Příklad (Míra tepelné ztráty v chladném počasí)

Míra tepelná ztráty:

$$H(t, v) = (10,45 + 10\sqrt{v} - v)(33 - t),$$

kde v je rychlost větru a t je teplota vzduchu. Předpokládejme, že $t = 0\,°C$ a $v = 4m/s$. Co má větší vliv na míru tepelné ztráty: změna rychlosti větru nebo změna teploty (o jednotku)?

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \left(\frac{5}{\sqrt{v}} - 1\right)(33 - t) \Longrightarrow \frac{\partial H}{\partial v}(0, 4) = 49,5$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = v - 10\sqrt{v} - 10,45 \Longrightarrow \frac{\partial H}{\partial t}(0, 4) = -26,45$$

Větší vliv má změna rychlosti větru. Kladná hodnota $(49,5)$ znamená, že s rostoucí rychlostí větru (při konstantní teplotě) roste míra tepelné ztráty. Naopak záporná hodnota $(-26,45)$ znamená, že s rostoucí teplotou (při konstantní rychlosti větru) klesá míra tepelné ztráty.

Příklad (Substituty a komplementy)

Poptávaná množství výrobků A a B závisí na cenách těchto výrobků následovně: $Q_A = \frac{50\sqrt[3]{P_B}}{\sqrt{P_A}}$, $\quad Q_B = \frac{75P_A}{\sqrt[3]{P_B^2}}$. Vypočtěte parciální derivace a určete, zda jsou výrobky A, B substituty nebo komplementy.

$$\frac{\partial Q_A}{\partial P_A} = -25P_A^{-3/2}P_B^{1/3} < 0 \qquad \frac{\partial Q_A}{\partial P_B} = \frac{50}{3}P_A^{-1/2}P_B^{-2/3} > 0$$

$$\frac{\partial Q_B}{\partial P_B} = -50P_AP_B^{-5/3} < 0 \qquad \frac{\partial Q_B}{\partial P_A} = 75P_B^{-2/3} > 0$$

- Zcela přirozeně pro oba výrobky platí, že s rostoucí cenou výrobku klesá jeho poptávané množství.
- S rostoucí cenou výrobku B roste poptávané množství výrobku A, podobně, s rostoucí cenou výrobku A roste poptávané množství výrobku B. Výrobky jsou substituty.

Tečná rovina a diferenciál

Nechť funkce f má spojité parciální derivace v okolí bodu (x_0, y_0). Pak rovnice **tečné roviny** ke grafu funkce f v bodě (x_0, y_0) má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

a funkční hodnoty v malém okolí bodu (x_0, y_0) lze aproximovat funkčními hodnotami na tečné rovině, tj. v malém okolí bodu (x_0, y_0) můžeme psát

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Označme $\mathrm{d}x = x - x_0$ a $\mathrm{d}y = y - y_0$. Přírůstek funkce f naměřený na tečné rovině (při posunu z bodu (x_0, y_0) do bodu (x, y))), tj. výraz

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f'_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y,$$

nazýváme **diferenciálem** funkce f v bodě (x_0, y_0).

- Rovnice tečné roviny je nejlepší lineární aproximací funkce v okolí daného bodu.

Příklad (Tečná rovina)

Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = xy^2 - x + 3y^2$ v bodě $(1, 2)$.

Funkční hodnota v bodě $(1, 2)$ je $z(1, 2) = 15$. Hodnoty parciálních derivací:

$$z'_x = y^2 - 1 \Longrightarrow z'_x(1, 2) = 3$$
$$z'_y = 2xy + 6y \Longrightarrow z'_y(1, 2) = 16$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = 15 + 3(x - 1) + 16(y - 2),$$

tj.

$$z = 3x + 16y - 20.$$

Příklad (Lineární aproximace)

Pomocí lineární aproximace vyočtěte přibližně $1,04^{2,02}$.

Najdeme tečnou rovinu funkce $z = x^y$ bodě $(1, 2)$: Funkční hodnota v bodě $(1, 2)$ je $z(1, 2) = 1$. Hodnoty parciálních derivací:

$$z'_x = yx^{y-1} \Longrightarrow z'_x(1,2) = 2$$
$$z'_y = x^y \ln x \Longrightarrow z'_y(1,2) = 0$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1,$$

tj. v malém okolí bodu $(1, 2)$ máme

$$x^y \approx 2x - 1,$$

tedy

$$1,04^{2,02} \approx 2 \cdot 1,04 - 1 = 1,08.$$

Příklad (Diferenciál: Změna objemu kužele)

Pomocí diferenciálu určete, o kolik cm^3 se přibližně změní objem kužele o poloměru podstavy $r_0 = 10$ cm a výškou $v_0 = 10$ cm, jestliže poloměr o 5 mm zvětšíme a výšku o 5 mm zmenšíme.

Objem kužele: $V(r, v) = \frac{1}{3}\pi r^2 v$.

Najdeme diferenciál této funkce v bodě $(10, 10)$ a určíme jeho hodnotu pro $\mathrm{d}r = 0,5$ a $\mathrm{d}v = -0,5$.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r v \Longrightarrow \frac{\partial V}{\partial r}(10,10) = \frac{200}{3}\pi$$
$$\frac{\partial V}{\partial v} = \frac{1}{3}\pi r^2 \Longrightarrow \frac{\partial V}{\partial v}(10,10) = \frac{100}{3}\pi$$

$$\mathrm{d}V(10,10) = \frac{200}{3}\pi\,\mathrm{d}r + \frac{100}{3}\pi\,\mathrm{d}v = \frac{200}{3}\pi \cdot 0,5 + \frac{100}{3}\pi(-0,5) = \frac{50}{3}\pi$$

Kladná hodnota znamená, že se objem zvětší přibližně o $\frac{50}{3}\pi$.

Příklad (Diferenciál: Odhad relativní chyby veličiny počítané pomocí měřených veličin)

Je měřena kinetická energie $E = \frac{1}{2}mv^2$ částice o hmotnosti m a rychlosti v. Relativní chyba při stanovení hmotnosti je 1%, při stanovení rychlosti 2%. Pomocí diferenciálu stanovte odhad pro relativní chybu počítané energie.

Označme m_0, v_0 skutečné hodnoty veličin a m, v naměřené hodnoty. Pro $\mathrm{d}m = m - m_0$ a $\mathrm{d}v = v - v_0$ máme $\left|\frac{\mathrm{d}m}{m_0}\right| \leq 0,01$ a $\left|\frac{\mathrm{d}v}{v_0}\right| \leq 0,02$.

Parciální derivace:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{1}{2}v^2, \quad \frac{\partial E}{\partial v} = mv.$$

Diferenciál funkce E v bodě (m_0, v_0) a odhad chyby:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E(m_0, v_0) &= \frac{1}{2}v_0^2\,\mathrm{d}m + m_0 v_0\,\mathrm{d}v \\ \frac{\mathrm{d}E(m_0, v_0)}{E(m_0, v_0)} &= \frac{\mathrm{d}m}{m_0} + 2\frac{\mathrm{d}v}{v_0} \\ \left|\frac{\mathrm{d}E(m_0, v_0)}{E(m_0, v_0)}\right| &\leq \left|\frac{\mathrm{d}m}{m_0}\right| + 2\left|\frac{\mathrm{d}v}{v_0}\right| \leq 0,01 + 2 \cdot 0,02 = 0,05. \end{aligned}$$

Relativní chyba počítané energie je přibližně 5%.

Parciální derivace vyšších řádů

Definice (Parciální derivace druhého řádu)

- Má-li funkce f'_x v bodě (x_0, y_0) parciální derivaci podle x, nazýváme ji **parciální derivací 2. řádu** podle x funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme $f''_{xx}(x_0, y_0)$ (nebo $f_{xx}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$).
- Má-li funkce f'_x v bodě (x_0, y_0) parciální derivaci podle y, nazýváme ji **smíšenou parciální derivací 2. řádu** funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme $f''_{xy}(x_0, y_0)$ (nebo $f_{xy}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x_0, y_0)$).

- Zcela analogicky definujeme a značíme parciální derivace druhého řádu $f''_{yx}(x_0, y_0)$ a $f''_{yy}(x_0, y_0)$.
- Podobně definujeme a značíme i parciální derivace vyšších řádů.
- Parciální derivace druhého řádu jsou celkem 4, parciálních derivací třetího je 8.

Příklad

Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu.

$$
\begin{aligned}
z &= e^{x^2y} \\
z'_x &= e^{x^2y}\cdot 2xy = 2xye^{x^2y} \\
z'_y &= e^{x^2y}\cdot x^2 = x^2e^{x^2y} \\
z''_{xx} &= 2y\cdot e^{x^2y} + 2xy\cdot e^{x^2y}\cdot 2xy = 2ye^{x^2y}(1+2x^2y) \\
z''_{xy} &= 2x\cdot e^{x^2y} + 2xy\cdot e^{x^2y}\cdot x^2 = 2xe^{x^2y}(1+x^2y) \\
z''_{yx} &= 2x\cdot e^{x^2y} + x^2\cdot e^{x^2y}\cdot 2xy = 2xe^{x^2y}(1+x^2y) \\
z''_{yy} &= x^2e^{x^2y}\cdot x^2 = x^4e^{x^2y}
\end{aligned}
$$

Skutečnost, že $z''_{xy} = z''_{yx}$, je důsledkem následující věty.

Věta (Schwarzova)

Nechť má funkce f spojité smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} v bodě (x_0, y_0). Pak platí $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Větu lze zobecnit i pro derivace vyšších řádů: Má-li funkce v bodě (x_0, y_0) spojité parciální derivace až do řádu n, pak při výpočtu těchto parciálních derivací nezáleží na tom, v jakém pořadí se derivuje podle jednotlivých proměnných, ale pouze na tom, kolikrát se podle které proměnné derivuje.

Využití systémů počítačové algebry

- Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

  `http://user.mendelu.cz/marik/akademie/`

- Matematické výpočty online (MAW) - parciální derivace:

  `http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=derivace`

Příklad
Určete parciální derivace funkce

$$z = x^2 \ln(x + y^3).$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (`http://www.wolframalpha.com/`):

- Parciální derivace podle proměnné x

  `differentiate x^2*ln(x+y^3) with respect to x`

- Parciální derivace podle proměnné y

  `differentiate x^2*ln(x+y^3) with respect to y`