

# Parciální derivace a diferenciál

## Vyšší matematika, Inženýrská matematika

LDF MENDELU



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

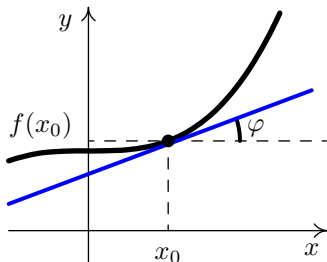
# Derivace funkce jedné proměnné a její geometrický význam

Derivace funkce  $y = f(x)$  v bodě  $x_0$  je definována jako limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Tato limita udává směrnici tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  a vyjadřuje tedy rychlost růstu funkce v bodě  $x_0$ .
- Tečna ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, f(x_0))$  má rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



(směrnice tečny =  $\operatorname{tg}\varphi$ )

Připomeňme, že pokud má funkce v bodě  $x_0$  vlastní derivaci (výše uvedená limita existuje a je konečná), pak je funkce v bodě  $x_0$  spojitá.

# Parciální derivace

## Definice (Parciální derivace)

Nechť funkce  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je definovaná v bodě  $(x_0, y_0)$  a nějakém jeho okolí.

- Položme  $g(x) = f(x, y_0)$ . Má-li funkce  $g$  derivaci bodě  $x_0$ , nazýváme tuto derivaci **parciální derivací** funkce  $f$  podle proměnné  $x$  **v bodě**  $(x_0, y_0)$  a značíme ji  $f'_x(x_0, y_0)$ . Platí tedy

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

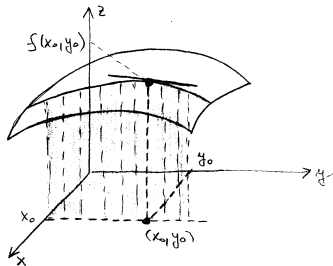
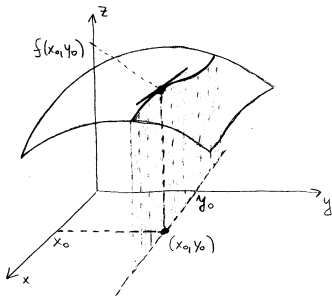
- Podobně položme  $h(y) = f(x_0, y)$ . Má-li funkce  $h$  derivaci bodě  $y_0$ , nazýváme tuto derivaci **parciální derivací** funkce  $f$  podle proměnné  $y$  **v bodě**  $(x_0, y_0)$  a značíme ji  $f'_y(x_0, y_0)$ . Platí tedy

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{h(y) - h(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

# Geometrický význam parciálních derivací

Parciální derivace určují rychlost růstu funkce ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami  $x$  a  $y$ . (Pozn.: Jsou speciálními případy tzv. směrových derivací, které určují rychlost růstu funkce v libovolném daném směru.)

- Parciální derivace  $f'_x(x_0, y_0)$  představuje směrnici tečny v bodě  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  ke křivce, která vznikne průsečíkem grafu funkce  $f$  s rovinou  $y = y_0$ .
- Podobně parciální derivace  $f'_y(x_0, y_0)$  představuje směrnici tečny v bodě  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  ke křivce, která vznikne průsečíkem grafu funkce  $f$  s rovinou  $x = x_0$ .



# Parciální derivace jako funkce

- Má-li funkce dvou proměnných  $z = f(x, y)$  parciální derivaci podle proměnné  $x$  **ve všech bodech nějaké množiny**  $M \subset D(f)$ , pak můžeme na této množině definovat funkci, která každému bodu  $z$  množiny  $M$  přiřadí parciální derivaci podle proměnné  $x$  v tomto bodě. Tato funkce se nazývá **parciální derivace funkce**  $f$  podle proměnné  $x$  a značí se  $f'_x$ . Podobně definujeme parciální derivaci podle proměnné  $y$  a značíme  $f'_y$ .

Jiná značení parciálních derivací:

$$f_x, f_y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z'_x, z'_y, \quad z_x, z_y, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

- Při výpočtu parciálních derivací se díváme na funkci  $f(x, y)$  jako na funkci jedné proměnné:
  - Při výpočtu parciální derivace  $f'_x(x, y)$  považujeme  $x$  za proměnnou a  $y$  za konstantu.
  - Podobně při výpočtu  $f'_y(x, y)$  považujeme  $y$  za proměnnou a  $x$  za konstantu.

Při výpočtu parciálních derivací tedy používáme stejné vzorce a stejná pravidla jako při derivování funkce jedné proměnné.

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$① \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2$$



## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$z'_x = 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0 + 2x^2 \cdot 2y$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1$$



## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$z'_y = 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$\textcircled{1} \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0 \\ &= 4x^2y + 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$① \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0 \\ &= 4x^2y + 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

$$② \quad z = x^y, \quad x > 0$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$① \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0 \\ &= 4x^2y + 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

$$② \quad z = x^y, \quad x > 0$$

$$z'_x = yx^{y-1} \quad (\text{derivujeme jako mocninou funkci})$$

## Příklad (Výpočet parciálních derivací)

$$① \quad z = x^3 + 2x^2y^2 + 3x^2y - 6xy + 8x - 2$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 3x^2 + 2 \cdot 2x \cdot y^2 + 3 \cdot 2x \cdot y - 6 \cdot 1 \cdot y + 8 \cdot 1 - 0 \\ &= 3x^2 + 4xy^2 + 6xy - 6y + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_y &= 0 + 2x^2 \cdot 2y + 3x^2 \cdot 1 - 6x \cdot 1 + 0 - 0 \\ &= 4x^2y + 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

$$② \quad z = x^y, \quad x > 0$$

$$z'_x = yx^{y-1} \quad (\text{derivujeme jako mocninou funkci})$$

$$z'_y = x^y \ln x \quad (\text{derivujeme jako exponenciální funkci})$$

# Souvislost spojitosti s parciálními derivacemi

Z pouhé existence parciálních derivací funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  neplyne spojitost funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ . Například funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě  $(0, 0)$  obě parciální derivace (platí, že  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ ), ale funkce není v bodě  $(0, 0)$  spojitá, neboť zde nemá ani limitu. Blížíme-li se totiž k bodu  $(0, 0)$  ve směru souřadných os, má funkce stále hodnotu 1, pokud se však blížíme v jiném směru, dostaneme hodnotu 0.

## Věta (Postačující podmínka spojitosti)

*Nechť funkce dvou proměnných  $f$  má v bodě  $(x_0, y_0)$  spojitě obě parciální derivace. Pak je funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  spojitá.*



## Příklad (Míra tepelné ztráty v chladném počasí)

Míra tepelná ztráty:

$$H(t, v) = (10,45 + 10\sqrt{v} - v)(33 - t),$$

kde  $v$  je rychlost větru a  $t$  je teplota vzduchu. Předpokládejme, že  $t = 0^\circ\text{C}$  a  $v = 4\text{m/s}$ . Co má větší vliv na míru tepelné ztráty: změna rychlosti větru nebo změna teploty (o jednotku)?

$$\frac{\partial H}{\partial v} = \left( \frac{5}{\sqrt{v}} - 1 \right) (33 - t) \implies \frac{\partial H}{\partial v}(0, 4) = 49,5$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = v - 10\sqrt{v} - 10,45 \implies \frac{\partial H}{\partial t}(0, 4) = -26,45$$

Větší vliv má změna rychlosti větru. Kladná hodnota  $(49,5)$  znamená, že s rostoucí rychlostí větru (při konstantní teplotě) roste míra tepelné ztráty. Naopak záporná hodnota  $(-26,45)$  znamená, že s rostoucí teplotou (při konstantní rychlosti větru) klesá míra tepelné ztráty.

## Příklad (Substituty a komplementy)

Poptávaná množství výrobků  $A$  a  $B$  závisí na cenách těchto výrobků následovně:

$Q_A = \frac{50\sqrt[3]{P_B}}{\sqrt{P_A}}$ ,  $Q_B = \frac{75P_A}{\sqrt[3]{P_B^2}}$ . Vypočtěte parciální derivace a určete, zda jsou výrobky  $A$ ,  $B$  substituty nebo komplementy.

$$\frac{\partial Q_A}{\partial P_A} = -25P_A^{-3/2}P_B^{1/3} < 0$$

$$\frac{\partial Q_A}{\partial P_B} = \frac{50}{3}P_A^{-1/2}P_B^{-2/3} > 0$$

$$\frac{\partial Q_B}{\partial P_B} = -50P_AP_B^{-5/3} < 0$$

$$\frac{\partial Q_B}{\partial P_A} = 75P_B^{-2/3} > 0$$

- Zcela přirozeně pro oba výrobky platí, že s rostoucí cenou výrobku klesá jeho poptávané množství.
- S rostoucí cenou výrobku  $B$  roste poptávané množství výrobku  $A$ , podobně, s rostoucí cenou výrobku  $A$  roste poptávané množství výrobku  $B$ . Výrobky jsou substituty.

# Tečná rovina a diferenciál

Nechť funkce  $f$  má spojité parciální derivace v okolí bodu  $(x_0, y_0)$ . Pak rovnice **tečné roviny** ke grafu funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  má tvar

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

a funkční hodnoty v malém okolí bodu  $(x_0, y_0)$  lze aproximovat funkčními hodnotami na tečné rovině, tj. v malém okolí bodu  $(x_0, y_0)$  můžeme psát

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Označme  $dx = x - x_0$  a  $dy = y - y_0$ . Přírůstek funkce  $f$  naměřený na tečné rovině (při posunu z bodu  $(x_0, y_0)$  do bodu  $(x, y)$ ), tj. výraz

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) dx + f'_y(x_0, y_0) dy,$$

nazýváme **diferenciálem** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .

- Rovnice tečné roviny je nejlepší lineární aproximací funkce v okolí daného bodu.

### Příklad (Tečná rovina)

Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce  $z = xy^2 - x + 3y^2$  v bodě  $(1, 2)$ .

---

Funkční hodnota v bodě  $(1, 2)$  je  $z(1, 2) = 15$ . Hodnoty parciálních derivací:

$$z'_x = y^2 - 1 \implies z'_x(1, 2) = 3$$

$$z'_y = 2xy + 6y \implies z'_y(1, 2) = 16$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = 15 + 3(x - 1) + 16(y - 2),$$

tj.

$$z = 3x + 16y - 20.$$

## Příklad (Lineární aproximace)

Pomocí lineární aproximace vypočtěte přibližně  $1,04^{2,02}$ .

Najdeme tečnou rovinu funkce  $z = x^y$  bodě  $(1, 2)$ : Funkční hodnota v bodě  $(1, 2)$  je  $z(1, 2) = 1$ . Hodnoty parciálních derivací:

$$z'_x = yx^{y-1} \implies z'_x(1, 2) = 2$$

$$z'_y = x^y \ln x \implies z'_y(1, 2) = 0$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1,$$

tj. v malém okolí bodu  $(1, 2)$  máme

$$x^y \approx 2x - 1,$$

tedy

$$1,04^{2,02} \approx 2 \cdot 1,04 - 1 = 1,08.$$

## Příklad (Diferenciál: Změna objemu kužele)

Pomocí diferenciálu určete, o kolik  $\text{cm}^3$  se přibližně změní objem kužele o poloměru podstavy  $r_0 = 10 \text{ cm}$  a výškou  $v_0 = 10 \text{ cm}$ , jestliže poloměr o 5 mm zvětšíme a výšku o 5 mm zmenšíme.

Objem kužele:  $V(r, v) = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ .

Najdeme diferenciál této funkce v bodě  $(10, 10)$  a určíme jeho hodnotu pro  $dr = 0,5$  a  $dv = -0,5$ .

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r v \implies \frac{\partial V}{\partial r}(10, 10) = \frac{200}{3}\pi$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \frac{1}{3}\pi r^2 \implies \frac{\partial V}{\partial v}(10, 10) = \frac{100}{3}\pi$$

$$dV(10, 10) = \frac{200}{3}\pi dr + \frac{100}{3}\pi dv = \frac{200}{3}\pi \cdot 0,5 + \frac{100}{3}\pi(-0,5) = \frac{50}{3}\pi$$

Kladná hodnota znamená, že se objem zvětší přibližně o  $\frac{50}{3}\pi$ .

## Příklad (Diferenciál: Odhad relativní chyby veličiny počítané pomocí měřených veličin)

Je měřena kinetická energie  $E = \frac{1}{2}mv^2$  částice o hmotnosti  $m$  a rychlosti  $v$ . Relativní chyba při stanovení hmotnosti je 1%, při stanovení rychlosti 2%. Pomocí diferenciálu stanovte odhad pro relativní chybu počítané energie.

Označme  $m_0, v_0$  skutečné hodnoty veličin a  $m, v$  naměřené hodnoty. Pro  $dm = m - m_0$  a  $dv = v - v_0$  máme  $\left| \frac{dm}{m_0} \right| \leq 0,01$  a  $\left| \frac{dv}{v_0} \right| \leq 0,02$ .

Parciální derivace:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = \frac{1}{2}v^2, \quad \frac{\partial E}{\partial v} = mv.$$

Diferenciál funkce  $E$  v bodě  $(m_0, v_0)$  a odhad chyby:

$$dE(m_0, v_0) = \frac{1}{2}v_0^2 dm + m_0v_0 dv$$

$$\frac{dE(m_0, v_0)}{E(m_0, v_0)} = \frac{dm}{m_0} + 2\frac{dv}{v_0}$$

$$\left| \frac{dE(m_0, v_0)}{E(m_0, v_0)} \right| \leq \left| \frac{dm}{m_0} \right| + 2 \left| \frac{dv}{v_0} \right| \leq 0,01 + 2 \cdot 0,02 = 0,05.$$

Relativní chyba počítané energie je přibližně 5%.

# Parciální derivace vyšších řádů

## Definice (Parciální derivace druhého řádu)

- Má-li funkce  $f'_x$  v bodě  $(x_0, y_0)$  parciální derivaci podle  $x$ , nazýváme ji **parciální derivací 2. řádu** podle  $x$  funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  a značíme  $f''_{xx}(x_0, y_0)$  (nebo  $f_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ ).
- Má-li funkce  $f'_x$  v bodě  $(x_0, y_0)$  parciální derivaci podle  $y$ , nazýváme ji **smíšenou parciální derivací 2. řádu** funkce  $f$  v bodě  $(x_0, y_0)$  a značíme  $f''_{xy}(x_0, y_0)$  (nebo  $f_{xy}(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x_0, y_0)$ ).
- Zcela analogicky definujeme a značíme parciální derivace druhého řádu  $f''_{yx}(x_0, y_0)$  a  $f''_{yy}(x_0, y_0)$ .
- Podobně definujeme a značíme i parciální derivace vyšších řádů.
- Parciální derivace druhého řádu jsou celkem 4, parciálních derivací třetího je 8.



## Příklad

Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2 y}$$

## Příklad

Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu.

$$\begin{aligned}z &= e^{x^2 y} \\ z'_x &= e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2 y}\end{aligned}$$

## Příklad

Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2 y}$$

$$z'_x = e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2 y}$$

$$z'_y = e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^2 e^{x^2 y}$$

## Příklad

Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2y}$$

$$z'_x = e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2y}$$

$$z'_y = e^{x^2y} \cdot x^2 = x^2e^{x^2y}$$

$$z''_{xx} = 2y \cdot e^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2y}(1 + 2x^2y)$$

## Příklad

Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2 y}$$

$$z'_x = e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2 y}$$

$$z'_y = e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^2 e^{x^2 y}$$

$$z''_{xx} = 2y \cdot e^{x^2 y} + 2xy \cdot e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2 y}(1 + 2x^2 y)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2 y} + 2xy \cdot e^{x^2 y} \cdot x^2 = 2xe^{x^2 y}(1 + x^2 y)$$

## Příklad

Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2y}$$

$$z'_x = e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2y}$$

$$z'_y = e^{x^2y} \cdot x^2 = x^2e^{x^2y}$$

$$z''_{xx} = 2y \cdot e^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2y}(1 + 2x^2y)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 = 2xe^{x^2y}(1 + x^2y)$$

$$z''_{yx} = 2x \cdot e^{x^2y} + x^2 \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xe^{x^2y}(1 + x^2y)$$

## Příklad

Vypočtěte všechny parciální derivace druhého řádu.

$$z = e^{x^2 y}$$

$$z'_x = e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2 y}$$

$$z'_y = e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^2 e^{x^2 y}$$

$$z''_{xx} = 2y \cdot e^{x^2 y} + 2xy \cdot e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2 y}(1 + 2x^2 y)$$

$$z''_{xy} = 2x \cdot e^{x^2 y} + 2xy \cdot e^{x^2 y} \cdot x^2 = 2xe^{x^2 y}(1 + x^2 y)$$

$$z''_{yx} = 2x \cdot e^{x^2 y} + x^2 \cdot e^{x^2 y} \cdot 2xy = 2xe^{x^2 y}(1 + x^2 y)$$

$$z''_{yy} = x^2 e^{x^2 y} \cdot x^2 = x^4 e^{x^2 y}$$

## Příklad

Vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu.

$$\begin{aligned}z &= e^{x^2y} \\z'_x &= e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xye^{x^2y} \\z'_y &= e^{x^2y} \cdot x^2 = x^2e^{x^2y} \\z''_{xx} &= 2y \cdot e^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2ye^{x^2y}(1 + 2x^2y) \\z''_{xy} &= 2x \cdot e^{x^2y} + 2xy \cdot e^{x^2y} \cdot x^2 = 2xe^{x^2y}(1 + x^2y) \\z''_{yx} &= 2x \cdot e^{x^2y} + x^2 \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy = 2xe^{x^2y}(1 + x^2y) \\z''_{yy} &= x^2e^{x^2y} \cdot x^2 = x^4e^{x^2y}\end{aligned}$$

Skutečnost, že  $z''_{xy} = z''_{yx}$ , je důsledkem následující věty.



## Věta (Schwarzova)

*Nechť má funkce  $f$  spojité smíšené parciální derivace  $f''_{xy}$ ,  $f''_{yx}$  v bodě  $(x_0, y_0)$ .  
Pak platí  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ .*

Větu lze zobecnit i pro derivace vyšších řádů: Má-li funkce v bodě  $(x_0, y_0)$  spojité parciální derivace až do řádu  $n$ , pak při výpočtu těchto parciálních derivací nezáleží na tom, v jakém pořadí se derivuje podle jednotlivých proměnných, ale pouze na tom, kolikrát se podle které proměnné derivuje.

- Využití systémů Sage, Maxima, Wolfram Alpha:

<http://user.mendelu.cz/marik/akademie/>

- Matematické výpočty online (MAW) - parciální derivace:

<http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=derivace>

## Příklad

Určete parciální derivace funkce

$$z = x^2 \ln(x + y^3).$$

Řešení pomocí Wolfram Alpha (<http://www.wolframalpha.com/>):

- Parciální derivace podle proměnné  $x$

`differentiate x^2*ln(x+y^3) with respect to x`

- Parciální derivace podle proměnné  $y$

`differentiate x^2*ln(x+y^3) with respect to y`