



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

---

# Aplikace diferenciálních rovnic – řešené příklady

Vyšší matematika, Inženýrská matematika

LDF MENDELU

Podpořeno projektem Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na disciplíny společného základu <http://akademie.ldf.mendelu.cz/cz> (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

---

## Příklad (Ropná skvrna)

Kruhová ropná skvrna na hladině se rozšiřuje tak, že poloměr roste rychlostí, která je nepřímo úměrná druhé mocnině poloměru. Sestavte diferenciální rovnici popisující tento proces a vyřešte ji – tj. zjistěte, jaká funkce popisuje proces zvětšování poloměru olejové skvrny v čase.

Označme:

$x \dots$  čas

$y = y(x) \dots$  poloměr skvrny

Rychlost růstu poloměru  $y$  je vyjádřena derivací  $y'$ . Derivace  $y'$  je tedy nepřímo úměrná funkci  $y^2$ . Nepřímá úměrnost znamená, že existuje konstanta  $k \in \mathbb{R}$ , že platí:

$$y' = k \frac{1}{y^2}$$

Řešení rovnice

$$y' = k \frac{1}{y^2}$$

---

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= k \frac{1}{y^2} \\ y^2 dy &= k dx \\ \frac{y^3}{3} &= kx + c \\ y^3 &= 3(kx + c) \\ y &= \sqrt[3]{3(kx + c)} \end{aligned}$$

## Příklad (Chladnutí polévky)

V kuchyni je teplota  $20^{\circ}\text{C}$ . Za jak dlouho se právě vypnutá vroucí polévka ochladí na  $25^{\circ}\text{C}$ , pokud po 10 minutách má teplotu  $60^{\circ}\text{C}$ ?

Návod: Podle Newtonova zákona je rychlost ochlazování tělesa na vzduchu přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a vzduchu.

Označme:

$x \dots$  čas

$y = y(x) \dots$  teplota polévky

Rychlost ochlazování polévky je vyjádřena derivací  $y'$ . Podle Newtonova zákona je tedy derivace  $y'$  přímo úměrná rozdílu  $y - 20$ . Přímá úměrnost znamená, že existuje konstanta  $k \in \mathbb{R}$ , že platí:

$$y' = k(y - 20).$$

Zároveň platí podmínky  $y(0) = 100$  a  $y(10) = 60$ .

Je potřeba najít řešení rovnice, které splňuje tyto podmínky a pak zjistit, pro jaké  $x$  je  $y = 25$ .

Řešení rovnice

$$y' = k(y - 20), \quad y(0) = 100, \quad y(10) = 60$$

---

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= k(y - 20) \\ \frac{1}{y - 20} dy &= k dx \\ \ln(y - 20) &= kx + c \end{aligned}$$

Dosazení podmínek:

$$y(0) = 100 : \quad \ln 80 = c$$

$$y(10) = 60 : \quad \ln 40 = 10k + \ln 80 \Rightarrow k = \frac{\ln 40 - \ln 80}{10} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{10} = -\frac{\ln 2}{10}$$

Řešení rovnice lze tedy vyjádřit vztahem

$$\ln(y - 20) = -\frac{\ln 2}{10}x + \ln 80$$

Zbývá zjistit, pro jaké  $x$  je  $y = 25$ . Dosadíme  $y = 25$  do rovnice:

$$\begin{aligned} \ln 5 &= -\frac{\ln 2}{10}x + \ln 80 \\ \frac{\ln 2}{10}x &= \ln 80 - \ln 5 \\ \frac{\ln 2}{10}x &= \ln \frac{80}{5} \\ \frac{\ln 2}{10}x &= \ln 16 \\ x &= 10 \frac{\ln 16}{\ln 2} = 10 \frac{4 \ln 2}{\ln 2} = 40 \end{aligned}$$

Polévka se ochladí na  $25^\circ\text{C}$  za 40 minut.

### Příklad (Samočištění jezera)

V jezeře je počáteční množství nečistot. Do jezera teče konstantní rychlostí čistá voda, mísí se se znečištěnou a odtéká. Průtok na odtoku je stejný jako na přítoku. Sestavte diferenciální rovnici popisující vývoj nečistot v čase. Předpokládáme, že voda je v jezeře dobře promíchávána.

Označme:

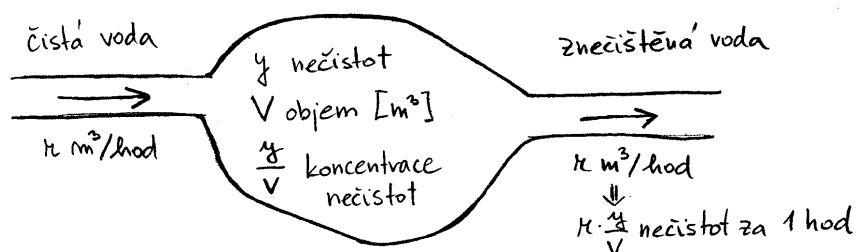
$x$  ... čas

$y = y(x)$  ... množství nečistot v jezeře

$y_0$  ... počáteční množství nečistot

$r$  ... průtok = množství vody, které přiteče/odteče za jednotku času (je konstantní)

$V$  ... objem jezera (konstantní)



Rychlost úbytku nečistot v jezeře je určena derivací  $y'$ . Zároveň je vyjádřena množstvím nečistot, které z jezera odtéčou za jednotku času, tj.  $r \frac{y}{V}$ . Rovnice popisující vývoj nečistot v čase je tedy:

$$y' = -r \frac{y}{V}, \quad y(0) = y_0$$

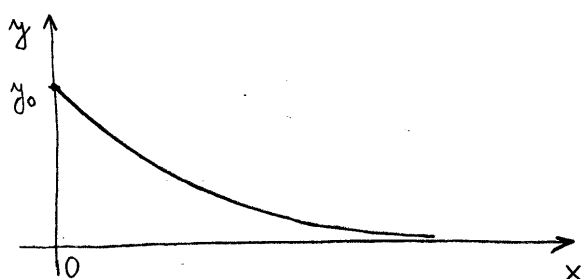
Jedná se o homogenní lineární rovnici, její obecné řešení je

$$y = ce^{-\frac{r}{V}x}.$$

Dosadíme počáteční podmínku:

$$y(0) = y_0 : \quad y_0 = ce^0 \implies c = y_0.$$

Vývoj nečistot v čase  $x$  je tedy určen funkcí  $y = y_0 e^{-\frac{r}{V}x}$



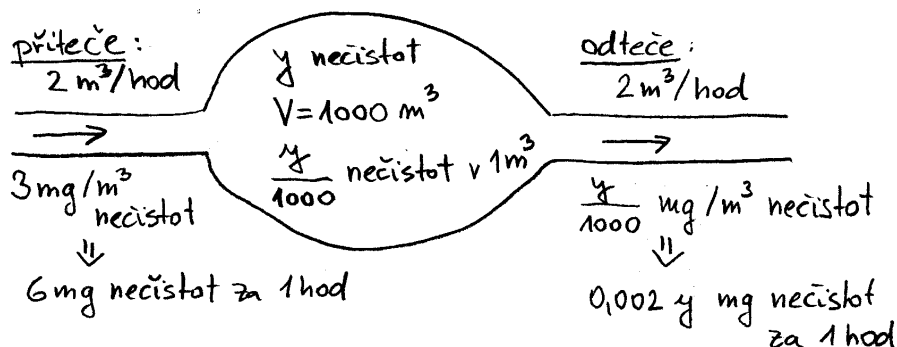
### Příklad (Znečišťování jezera)

V jezeře je voda o objemu  $1000 \text{ m}^3$ . Do jezera přitéká a odtéká voda stejnou konstantní rychlostí - průtok je  $2 \text{ m}^3/\text{hod}$ . Voda v jezeře je na počátku čistá, začne však přitékat znečištěná voda. Koncentrace nečistot na přítoku je  $3 \text{ mg}/\text{m}^3$ . Vaším úkolem je zachránit život v jezeře tak, že udržíte koncentraci nečistot v jezeře pod hodnotou  $1 \text{ mg}/\text{m}^3$ . Kolik máte času na zastavení přísunu nečistot? Předpokládejme, že voda je v jezeře dobře promíchávána.

Označme:

$x \dots$  čas

$y = y(x) \dots$  množství nečistot v jezeře



Rychlost změny množství nečistot v jezeře je určena derivací  $y'$ . Zároveň je vyjádřena rozdílem nečistot, které do jezera přitečou a z jezera odtečou za jednotku času, tj.  $6 - 0,002y$ . Rovnice popisující vývoj nečistot v čase je tedy:

$$y' = 6 - 0,002y, \quad y(0) = 0$$

Rovnici můžeme řešit buď jako lineární nebo se separovanými proměnnými:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6 - 0,002y} dy &= dx \\ \frac{-0,002}{6 - 0,002y} dy &= -0,002 dx \\ \ln(6 - 0,002y) &= -0,002x + c \\ 6 - 0,002y &= Ce^{-0,002x} \\ y &= 500(6 - Ce^{-0,002x}) \end{aligned}$$

Dosadíme podmínku:

$$y(0) = 0 : \quad 0 = 500(6 - C) \implies C = 6 \implies y = 3000(1 - e^{-0,002x})$$

Zbývá zjistit, v jakém čase  $x$  dosáhne koncentrace nečistot v jezeře hodnoty  $1 \text{ mg/m}^3$ . Koncentrace je dána podílem  $\frac{y}{1000}$ , tedy množství nečistot odpovídající koncentraci  $1 \text{ mg/m}^3$  je  $y = 1000 \text{ mg}$ . Do vztahu  $y = 3000(1 - e^{-0,002x})$  dosadíme tedy  $y = 1000$  a vypočteme odpovídající  $x$ :

$$\begin{aligned} 1000 &= 3000(1 - e^{-0,002x}) \\ \frac{1}{3} &= 1 - e^{-0,002x} \\ e^{-0,002x} &= \frac{2}{3} \\ -0,002x &= \ln(2/3) \\ x &= -500 \ln(2/3) = 500 \ln(3/2) \approx 202 \end{aligned}$$

Přísun nečistot je potřeba zastavit do 202 hodin, tj. do 8 dní 10 hodin.

