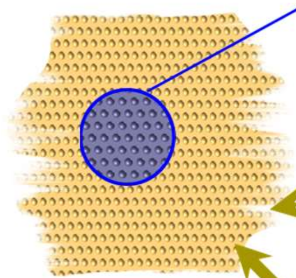
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ROZDĚLENÍ NÁHODNÝCH VELIČIN

Vytvořeno s podporou projektu Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

1

1



VÝBĚROVÝ SOUBOR - konkrétní měřená data - JE JEN PROSTŘEDKEM K POZNÁNÍ ZÁKLADNÍHO SOUBORU

VÝBĚROVÉ STATISTIKY platí POUZE pro VÝBĚROVÝ SOUBOR

Z výběrových statistik musíme ODHADNOUT vlastnosti základního souboru (NEZNÁME HO CELÝ)

ZÁKLADNÍ SOUBOR -
-má velmi mnoho nebo nekonečně mnoho prvků
nelze vše změřit
ZAJÍMAJÍ NÁS JEHO VLASTNOSTI

2

VÝBĚROVÁ ŠETŘENÍ

- **Plánování výběrového šetření**
  - rozsah výběru
  - typ výběru
- **odhady parametrů ZS**
- **testování hypotéz o ZS**

ZALOŽENO NA TEORII PRAVDĚPODOBNOSTI – MATEMATICKÁ STATISTIKA

3

3

PRAVDĚPODOBNOST

Pravděpodobnost je objektivní vlastnost náhodného jevu. Je to **reálné číslo, které charakterizuje** (poměřuje) **možnost nastoupení určitého jevu při působení vymezeného komplexu podmínek.**

Definice pravděpodobnosti:

1. **AXIOMATICKÁ**
2. **KLASICKÁ**
3. **STATISTICKÁ**

4

4

AXIOMATICKÁ DEFINICE PRAVDĚPODOBNOSTI

Vychází ze 3 axiomů:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\Omega) = 1 \wedge P(\emptyset) = 0$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

(PRO NESLUČITELNÉ JEVY)

5

5

KLASICKÁ DEFINICE PRAVDĚPODOBNOSTI

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

N_A **počet všech možných případů příznivých jevu A**

N **počet případů teoreticky možných (základní soubor)**

6

6

STATISTICKÁ DEFINICE PRAVDĚPODOBNOSTI

$$p(A) = \frac{n_A}{n}$$

n_A je počet realizací, při kterých nastal jev A ,

n je počet všech realizací (velikost výběru)

7

7

STATISTICKÁ DEFINICE PRAVDĚPODOBNOSTI

= „zákon velkých čísel“

$$\underset{\boxed{n\to\infty}}{p(A)} = P(A)$$

n	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
n_B	0	4	4	5	5	5	5	6	6	8	8	9	10	11
n_B/n	0,00	0,40	0,27	0,25	0,20	0,17	0,14	0,15	0,13	0,16	0,15	0,15	0,15	0,16
n_J	3	3	3	3	8	8	10	15	18	21	22	25	26	28
n_J/n	0,60	0,30	0,20	0,15	0,32	0,27	0,29	0,38	0,40	0,42	0,40	0,42	0,40	0,40

n počet pokácených stromů

n_B napadení hnilobou běle

n_B/n relativní četnost pro hnilobu běle

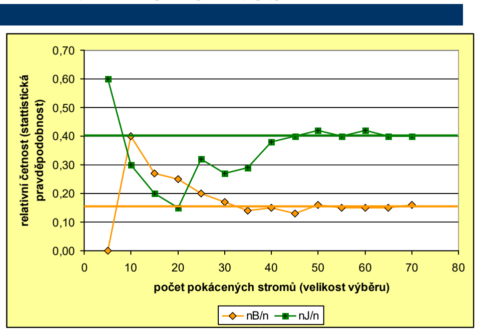
n_J napadení hnilobou jádra

n_J/n relativní četnost pro hnilobu jádra

8

8

STATISTICKÁ DEFINICE PRAVDĚPODOBNOSTI



9

9

PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST – výběr s opakováním a bez opakování

- **výběr s opakováním** (s vracením) - jednotlivé prvky výběru před dalším výběrem **vracíme do základního souboru**

$\Downarrow$

každý následující výběr je nezávislý

- **výběr bez opakování** (bez vracení) - jednotlivé prvky výběru před dalším výběrem **nevracíme do základního souboru**

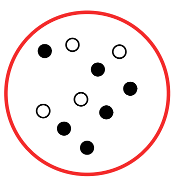
$\Downarrow$

každý následující výběr je závislý, používáme podmíněnou pravděpodobnost

10

10

VÝBĚR S OPAKOVÁNÍM A BEZ OPAKOVÁNÍ - příklad



celkový počet kuliček	$N = 10$
bílá kulička (jev A)	$M = 4$
černá kulička (jev $\overline{\mathbf{A}}$)	$N - M = 6$

Jaká je pravděpodobnost, že ve 2. tahu vytáhneme bílou kuličku?

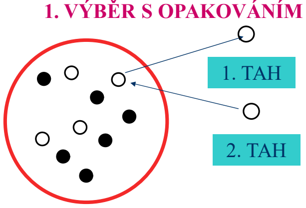
jev A_1- vytáhneme bílou kuličku v 1. tahu
jev A_2- vytáhneme bílou kuličku ve 2. tahu

11

11

VÝBĚR S OPAKOVÁNÍM A BEZ OPAKOVÁNÍ - příklad

1. VÝBĚR S OPAKOVÁNÍM



$$P(A_1) = \frac{M}{N} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$P(A_2) = \frac{M}{N} = \frac{4}{10} = 0,4$$

12

12

VÝBĚR S OPAKOVÁNÍM A BEZ OPAKOVÁNÍ - příklad

2. VÝBĚR BEZ OPAKOVÁNÍ

1. TAH $P(A_1) = \frac{M}{N} = \frac{4}{10} = 0,4$

2. TAH

1.tah bílá: $P(A_2 / A_1) = \frac{M-1}{N-1} = \frac{3}{9} = 0,333$

1.tah černá: $P(A_2 / \overline{A}_1) = \frac{M}{N-1} = \frac{4}{9} = 0,444$

13

13

VÝBĚR S OPAKOVÁNÍM A BEZ OPAKOVÁNÍ - příklad

Pro velký soubor – N = 10 000, M = 4 000:

1. VÝBĚR S OPAKOVÁNÍM

1. TAH $P(A_1) = \frac{M}{N} = \frac{4000}{10000} = 0,4$

2. TAH $P(A_2) = \frac{M}{N} = \frac{4000}{10000} = 0,4$

14

14

VÝBĚR S OPAKOVÁNÍM A BEZ OPAKOVÁNÍ - příklad

2. VÝBĚR BEZ OPAKOVÁNÍ

1. TAH $P(A_1) = \frac{M}{N} = \frac{4000}{10000} = 0,4$

2. TAH

1.tah bílá: $P(A_2 / A_1) = \frac{M-1}{N-1} = \frac{3999}{9999} = 0,3999$

1.tah černá: $P(A_2 / \overline{A}_1) = \frac{M}{N-1} = \frac{4000}{9999} = 0,4$

15

15

NÁHODNÁ VELIČINA

NÁHODNÁ VELIČINA je taková veličina, **jejíž hodnota se pokus od pokusu mění působením náhodných vlivů (např. výška stromu).**

NÁHODNÝ VEKTOR je libovolná uspořádaná n-tice náhodných veličin (např. výška stromu, tloušťka stromu, délka koruny, objem stromu).

16

16

DISKRÉTNÍ A SPOJITÉ VELIČINY

Náhodné veličiny mohou být:

- **diskrétní – nabývají konečného nebo spočetného počtu hodnot po nespojitých krocích (např. počty, četnosti, …)**
- **spojité – nabývají jakékoliv hodnoty v určitém intervalu (většina měřitelných veličin)**

17

17

ZÁKONY ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTI

Zákon rozdělení pravděpodobnosti vyjadřuje pravděpodobnosti výskytu jednotlivých hodnot náhodné veličiny. Může být vyjádřen dvěma různými způsoby:

- **frekvenční funkcí**
- **distribuční funkcí**

18

18

FREKVENČNÍ A DISTRIBUČNÍ FUNKCE

Frekvenční funkce f(x) udává pravděpodobnost, že určitá náhodná veličina X nabude právě konkrétní hodnoty x.

$$f(x) = P(X = x)$$

Distribuční funkce F(x) udává pravděpodobnost, že určitá náhodná veličina X nabude nejvýše konkrétní hodnoty x.

$$F(x) = P(X \leq x)$$

19

19

FREKVENČNÍ A DISTRIBUČNÍ FUNKCE PRO DISKRÉTNÍ VELIČINU

Zákon rozdělení pravděpodobnosti pro diskrétní náhodnou veličinu musí splňovat tyto podmínky:

$$P(x) \geq 0 \quad \text{(pro všechna x)}$$

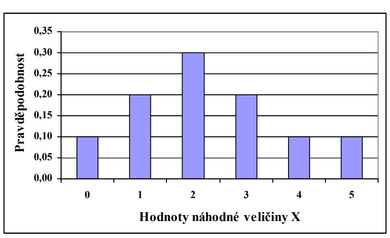
$$\sum_{\text{všechna } x} P(x) = 1$$

20

20

FREKVENČNÍ FUNKCE PRO DISKRÉTNÍ VELIČINU

X	P(x)
0	0,1
1	0,2
2	0,3
3	0,2
4	0,1
5	0,1
Celkem	1,0

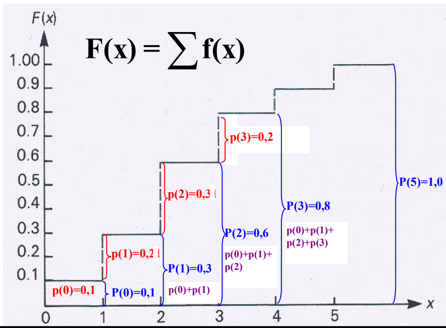


21

21

DISTRIBUČNÍ FUNKCE PRO DISKRÉTNÍ VELIČINU

X	P(x)
0	0,1
1	0,3
2	0,6
3	0,8
4	0,9
5	1
Celkem	1,0



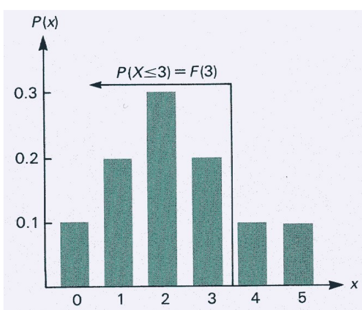
22

22

FREKVENČNÍ A DISTRIBUČNÍ FUNKCE PRO DISKRÉTNÍ VELIČINU - příklady

Pravděpodobnost, že diskrétní náhodná veličina nabude nejvýše hodnoty 3 –

distribuční funkce F(3)



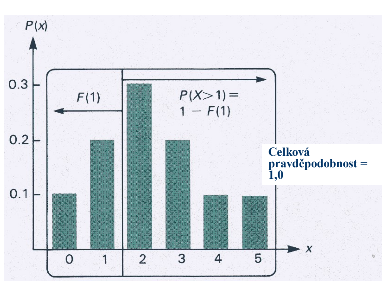
23

23

FREKVENČNÍ A DISTRIBUČNÍ FUNKCE PRO DISKRÉTNÍ VELIČINU - příklady

Pravděpodobnost, že diskrétní náhodná veličina nabude hodnot vyšších než 1

distribuční funkce 1 - F(1)



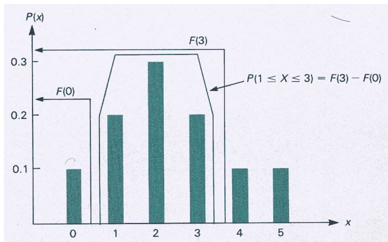
24

24

FREKVENČNÍ A DISTRIBUČNÍ FUNKCE PRO DISKRÉTNÍ VELIČINU - příklady

Pravděpodobnost, že diskrétní náhodná veličina nabude hodnot v intervalu 1 - 3

distribuční funkce F(3) – F(0)



25

25

DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ BINOMICKÉ (n,p)

Binomická náhodná veličina je založena na **Bernoulliho pokusu**, který musí splňovat tyto podmínky:

- každý pokus má **dva možné výsledky** – „úspěch“ a „neúspěch“
- **pravděpodobnost** úspěchu – **p** – je stálá během všech pokusů a **je předem známá**
- všech **n** pokusů je **vzájemně nezávislých**, tj. výsledek žádného pokusu neovlivňuje výsledky ostatních

26

26

DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ BINOMICKÉ (n,p)

Frekvenční funkce:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x} & pro\ x = 0,1,2,3,.... \\ 0 & pro\ jiná\ x \end{cases}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$\mu = n \cdot p$$

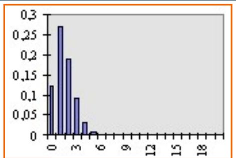
$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$$

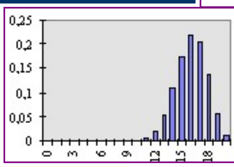
27

27

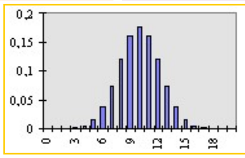
DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ
BINOMICKÉ (n,p) - příklad

n = 20
p = 0,8
μ = 16
σ = 3,2





n = 20
p = 0,1
μ = 2
σ = 1,8



n = 20
p = 0,5
μ = 10
σ = 5

28

28

DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ
BINOMICKÉ (n,p) - příklad

Jaká je pravděpodobnost, že z 10 hodů mincí padne 6x „hlava“?

n = 10, p = 0,5, f(6) = ?

$$f(6)=\binom{n}{x}\cdot p^{x}\cdot(1-p)^{n-x}=\binom{10}{6}\cdot 0,5^{6}\cdot(1-0,5)^{10-6}=0,205$$

Jaká je pravděpodobnost, že z 10 hodů mincí padne NEJVÝŠE 6x „hlava“?

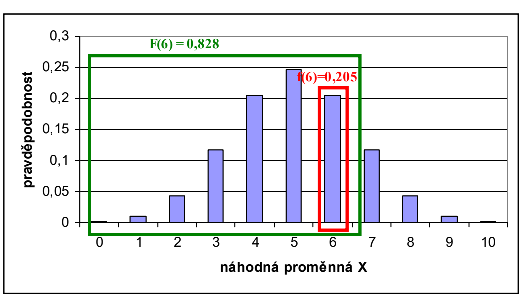
n = 10, p = 0,5, F(6) = ?

F(6) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) =
= 0,001 + 0,010 + 0,044 + 0,117 + 0,205 + 0,246 + 0,205 =
= 0,828

29

29

DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ
BINOMICKÉ (n,p) - příklad



30

30

DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ HYPERGEOMETRICKÉ (n, N, M)

Hypergeometrické rozdělení je zevšeobecněním binomického rozdělení **pro závislé pokusy** (výběry bez opakování):

- známe velikost základního souboru **N** (počet všech možných realizací náhodného experimentu),
- v rámci základního souboru známe počet prvků **M**, které jsou nositelem zkoumaného jevu
- jedná se o výběr bez opakování (bez vracení), kdy pravděpodobnost výběru prvku se znakem A (zkoumaným jevem) není při všech pokusech stejná, ale mění se v závislosti na výsledcích předchozích pokusů

31

31

DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ HYPERGEOMETRICKÉ (n, N, M)

Frekvenční funkce:

$$\boxed{f(x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}}$$

$$\mu = n \cdot \frac{M}{N} \qquad \sigma^2 = np(1-p) \cdot \frac{(N-n)}{(n-1)}$$

32

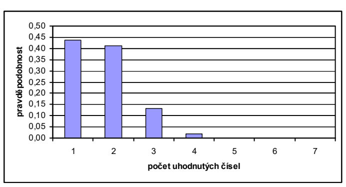
32

DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ HYPERGEOMETRICKÉ - příklad

Jaká je pravděpodobnost výhry ve Sportce (6 vsazených čísel)?

N = 49
M = 6
n = 6
x = 1,2,3,4,5,6

Počet uhodnutých čísel	Pravděpodobnost
0	0,436
1	0,413
2	0,132
3	0,018
4	0,001
5	$1{,}845.10^{-5}$
6	$7{,}151.10^{-8}$



33

33

DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ – POISSONOVO

Poissonovo rozdělení popisuje pravděpodobnost nastoupení jevu v mnoha pokusech ($n \to \infty$) za předpokladu, že výskyt jevu má v jednotlivém pokusu jen malou pravděpodobnost ($p \to 0$)

Frekvenční funkce:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^x}{x!} \qquad \mu = \sigma^2 = \lambda$$

34

34

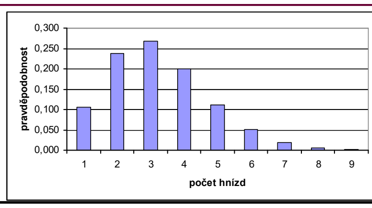
DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ – POISSONOVO - příklad

V rámci výzkumného programu byl zjišťován hnízdní režim a rozmístění hnízd určitého druhu ptáků. Zájmové území bylo rozděleno na plošky po 1ha a na každé byl zjištěn počet hnízd. V jednotlivých kvadrátech byly zjištěny následující počty: 3,4,1,1,3,0,0,1,2,3,4,5,0,1,3,5,5,2,6,3,1,1,1,0,1

Jaká je hnízdní hustota a jaká je pravděpodobnost výskytu hnízd na ploše 1 ha?

$\overline{x} = \lambda = 2.24$

Počet hnízd	Pravděpodobnost
0	0,106
1	0,238
2	0,267
3	0,199
4	0,112
5	0,050
6	0,019
7	0,006
8	0,002



35

35

VZTAHY MEZI DISKRÉTNÍMI ROZDĚLENÍMI

BINOMICKÉ → (pro $n \to \infty$ a $p = 0,5$) → **NORMÁLNÍ** (SPOJITÉ!!)

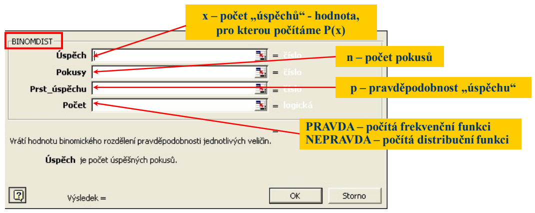
BINOMICKÉ → (pro $n \to \infty$ a $p < 0,1$) → **POISSONOVO**

BINOMICKÉ → (pro relativně malé základní soubory, pro výběry bez opakování) → **HYPERGEOMETRICKÉ**

36

36

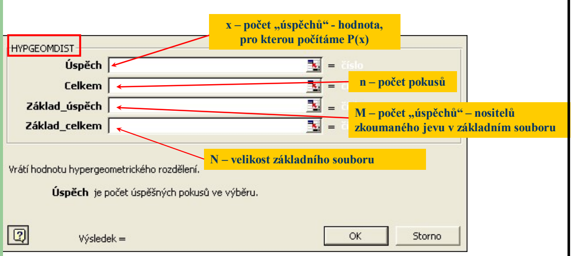
VÝPOČET V EXCELU – binomické rozdělení



37

37

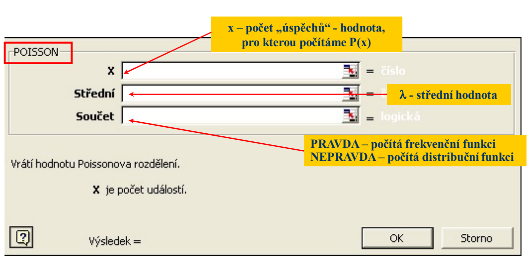
VÝPOČET V EXCELU- hypergeometrické rozdělení



38

38

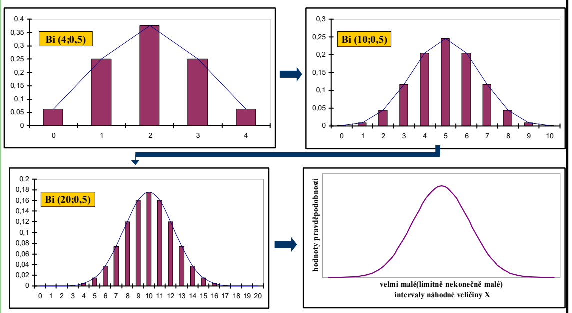
VÝPOČET V EXCELU – Poissonovo rozdělení



39

39

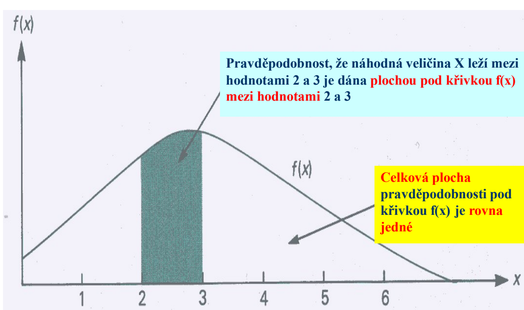
SPOJITÉ ROZDĚLENÍ



40

40

SPOJITÉ ROZDĚLENÍ



41

41

SPOJITÉ ROZDĚLENÍ- – DISTRIBUČNÍ FUNKCE

Distribuční funkce vzniká jako **součtová funkce** k frekvenční funkci. (podobně jako u diskrétní veličiny)

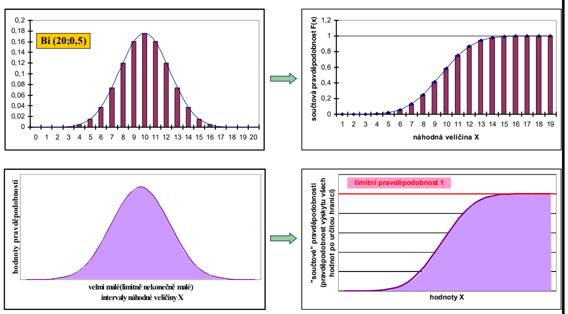
Vzhledem k tomu, že u spojitých náhodných veličin je plocha pod křivkou frekvenční funkce spojitá, distribuční funkce vznikne **jako určitý integrál frekvenční funkce po hraniční hodnotu a**:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot d(x)}$$

42

42

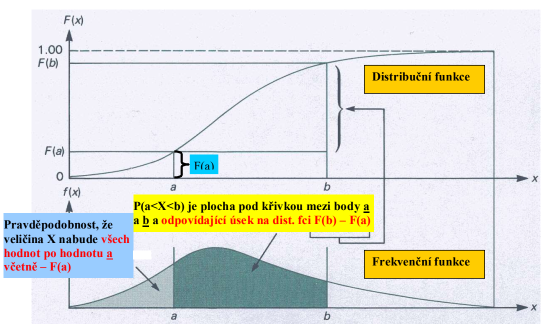
SPOJITÉ ROZDĚLENÍ- – DISTRIBUČNÍ FUNKCE



43

43

SPOJITÉ ROZDĚLENÍ- – DISTRIBUČNÍ FUNKCE



44

44

SPOJITÉ ROZDĚLENÍ- – DISTRIBUČNÍ FUNKCE - kvantily

KVANTIL určitého rozdělení je hodnota, pod kterou leží P.100 (%) hodnot. Platí:

$$\boxed{F(x_P) = P}$$

a hodnota x_P se nazývá (P.100) %-ní kvantil daného rozdělení spojité náhodné veličiny.

Pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny X se nachází v určitém intervalu hodnot, se stanoví podle vztahu

$$\boxed{P[x < X < x + \Delta x] = F(x + \Delta x) - F(x)}$$

45

45

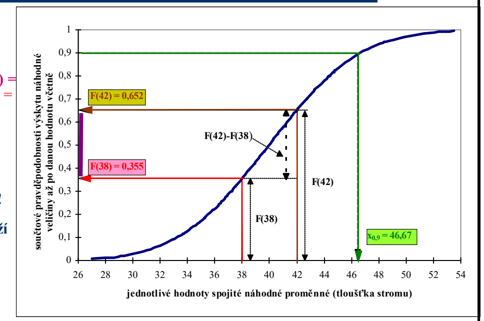
SPOJITÉ ROZDĚLENÍ- – DISTRIBUČNÍ FUNKCE - příklad

P(x<38) = 0,355

P(38< x<42) = F(42)-F(38) = = 0,298

P = 0,9
$x_{0,9}$ = 46,67

90-ti % KVANTIL !!
tj. pod touto hodnotou leží 90% hodnot

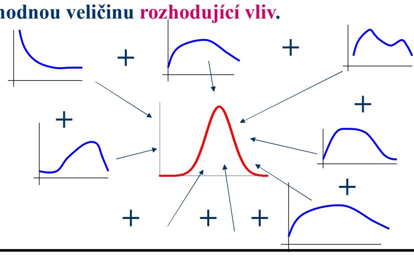


46

46

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Normální rozdělení je zákonem rozdělení součtu libovolných náhodných veličin. Stačí, aby **sčítanců byl dostatečný počet a aby žádný z nich neměl na výslednou náhodnou veličinu rozhodující vliv.**



47

47

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – frekvenční funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}$$

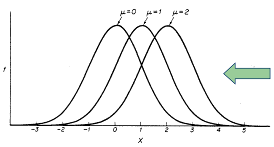
Normální rozdělení má dva parametry:

- **střední hodnotu μ**
- **rozptyl σ^2**

48

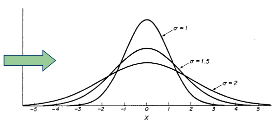
48

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – vliv parametrů



vliv změny střední hodnoty

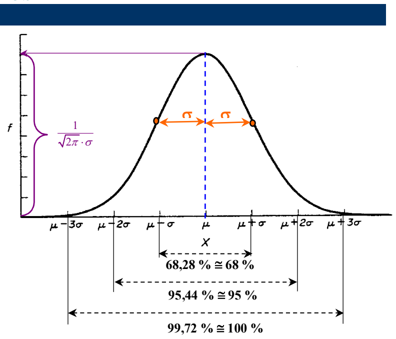
vliv změny rozptylu (směrodatné odchylky)



49

49

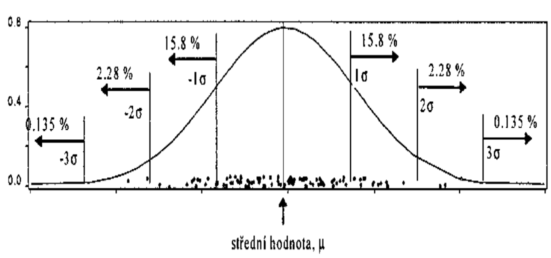
NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – vlastnosti



50

50

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – vlastnosti



51

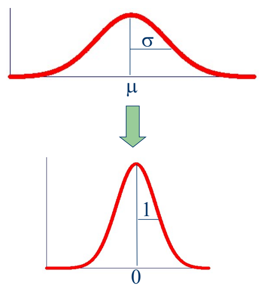
51

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – standardizace

$N(\mu, \sigma^2)$ – změnou parametrů získáme nekonečný počet normálních náhodných veličin

STANDARDIZACE

STANDARDIZOVANÉ NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ N(0,1)



52

52

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – standardizace

Standardizovaná normální náhodná veličina Z:

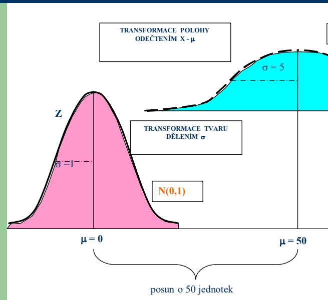
$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\left[-\frac{z^2}{2}\right]}$$

53

53

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – standardizace



Mění se pouze tvar rozdělení, plocha pod křivkami (tedy **pravděpodobnost) zůstává stejná (=1)**

54

54

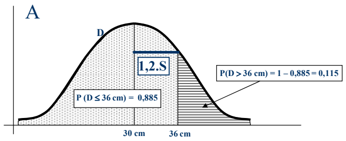
NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – standardizace - příklad

Předpokládejme, že výčetní tloušťky stromů v určitém porostu mají normální rozdělení. Střední tloušťka je 30 cm, směrodatná odchylka je 5 cm. Celkem bylo měřeno 500 stromů. Určete

a) kolik stromů je silnějších než 36 cm

b) jaká je pravděpodobnost, že náhodným výběrem vybereme strom silnější než 36 cm

c) kolik stromů leží v rozmezí tlouštěk 25 – 36 cm

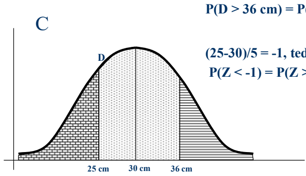


$$Z = \frac{36 - 30}{5} = 1,2$$

55

55

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – standardizace - příklad



P(D > 36 cm) = P(Z > 1,2) = 0,1151

(25-30)/5 = -1, tedy P(D < 25 cm) = P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 – 0,8413 = 0,1587

P(25 cm < D < 36 cm) = P(-1 < Z < 1,2) = 1 – ((Z < -1) + + (Z > 1,2)) = 1 – (0,1587 + 0,1151) = 0,7262

56

56

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – standardizace – příklad 2

Letecká společnost se snaží optimalizovat spotřebu paliva na určité pravidelné lince. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že spotřeba paliva, v závislosti na letových podmínkách a obsazenosti letadla, má normální rozdělení se střední hodnotou μ = 5.7 tuny a směrodatnou odchylkou σ = 0,5 tuny. Jaké množství paliva je potřeba, aby letadlo doletělo do cílového města s pravděpodobností P = 99% bez nebezpečí mezipřistání kvůli doplnění paliva?

Spotřeba paliva X ~ N(5.7;0,5²).

Hledáme hodnotu, pro kterou platí P(X<x)=0.99. Veličinu X převedeme na standardizovanou veličinu Z, pro kterou platí obdobně P(Z<z) = 0.99. V tabulkách (jednostranných) najdeme hodnotu pro P(z) = 0.49 ⇒ 2.33

Poté převedeme standardizovanou veličinu Z = 2.33 do původních jednotek: 2.33 = (x – 5.7)/0.5 = 6,86 tuny paliva.

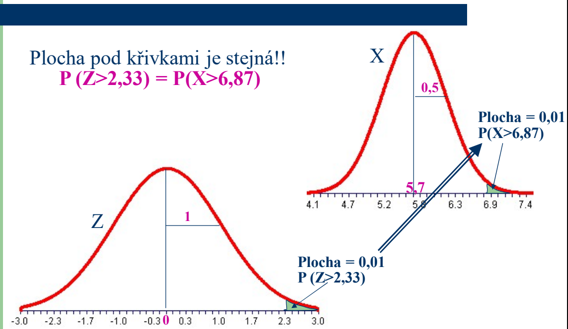
57

57

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – standardizace – příklad 2

Plocha pod křivkami je stejná!!

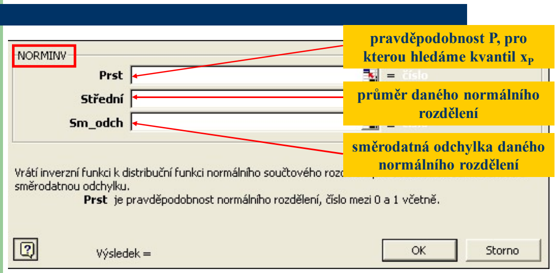
P (Z>2,33) = P(X>6,87)



58

58

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – řešení v Excelu

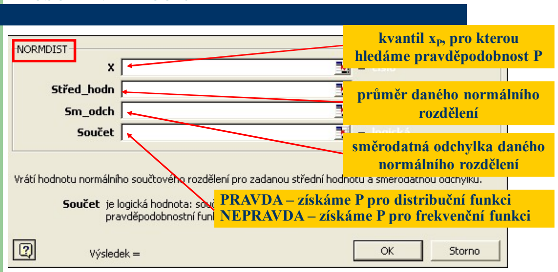


NORMINV – jako výsledek získáme hodnotu kvantilu pro zadané **obecné** normální rozdělení (určené svým průměrem a sm. odchylkou) a pro zadanou pravděpodobnost

59

59

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – řešení v Excelu

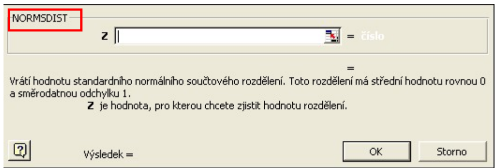


NORMDIST– jako výsledek získáme hodnotu pravděpodobnosti pro zadané **obecné** normální rozdělení (určené svým průměrem a sm. odchylkou) a pro zadaný kvantil x_p. Můžeme volit mezi frekvenční a distribuční funkcí.

60

60

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – řešení v Excelu

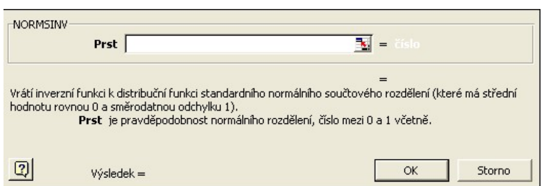


NORMSDIST– jako výsledek získáme hodnotu pravděpodobnosti distribuční funkce pro zadané standardizované normální rozdělení. Zadáváme hodnotu Z.

61

61

NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ – řešení v Excelu



NORMSINV– jako výsledek kvantil distribuční funkce pro zadané standardizované normální rozdělení. Zadáváme hodnotu pravděpodobnosti (Prst).

62

62

t-ROZDĚLENÍ (STUDENTOVO)

Statistika

$$T = \frac{X}{Z.k}$$

kde X je náhodná veličina s rozdělením N (0,1) a Z má rozdělení Chi-kvadrát (χ^2) má **t-rozdělení (Studentovo)** s **k = n – 1 stupni volnosti**

63

63

STUPNĚ VOLNOSTI (df, f)

Počet **stupňů volnosti** je roven **celkovému počtu měření** minus **počet omezujících podmínek**. Omezující podmínkou se rozumí určitá hodnota vypočítaná z měřených hodnot.

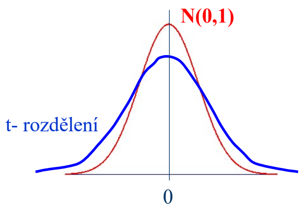
Mějme hodnoty 10, 12, 16, 18 a z nich vypočítaný průměr $\overline{x}$ = 14. Kolik jiných čtveřic čísel se dá sestavit se stejným průměrem?

Nekonečně mnoho. Ale s tím, že 3 z čísel budou libovolné, čtvrté musí být voleno tak, aby splnilo podmínku součtu $\sum x = 56$. Tedy 3 členy jsou volné, 1 je vázaný. Počet **stupňů volnosti** = **počet hodnot** – **počet omezení** = **4** – **1** = **3**

64

64

t-ROZDĚLENÍ (STUDENTOVO)



střední hodnota	$\mu = 0$	*pro k> 1*
rozptyl	$\sigma^2 = k/(k-2)$	*pro k> 2*

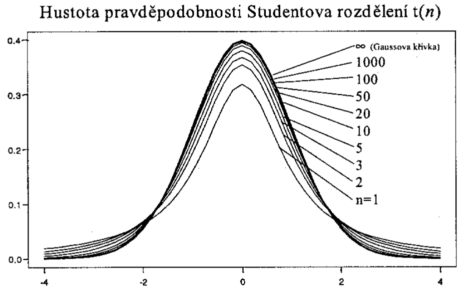
Pro k → ∞ (prakticky pro n > 30) přechází v normální rozdělení N(0,1)

65

65

t-ROZDĚLENÍ (STUDENTOVO)

Hustota pravděpodobnosti Studentova rozdělení t(n)



66

66

CHI-KVADRÁT (PEARSONOVO) ROZDĚLENÍ (χ^2)

Mějme normální náhodnou veličinu **X** s rozdělením **N (μ, σ^2).** Ze souboru hodnot této veličiny provedeme všechny možné **nezávislé výběry rozsahu f**. Pro každý výběr vypočítáme hodnotu

$$y_i = \sum_{i=1}^{f}\left[\frac{(x_i - \mu)}{\sigma}\right]^2 = \sum_{i=1}^{f} z_i^2$$

Všemi hodnotami y_i je definována Pearsonova náhodná veličina χ^2. Hodnota f je počet stupňů volnosti.

střední hodnota $\mu = f$

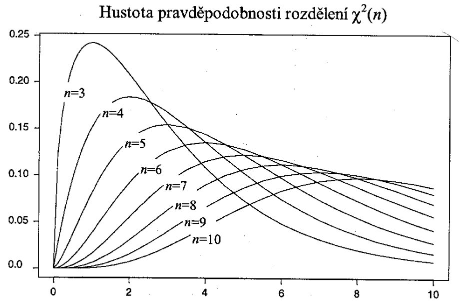
rozptyl $\sigma^2 = 2f$

67

67

CHI-KVADRÁT (PEARSONOVO) ROZDĚLENÍ (χ^2)

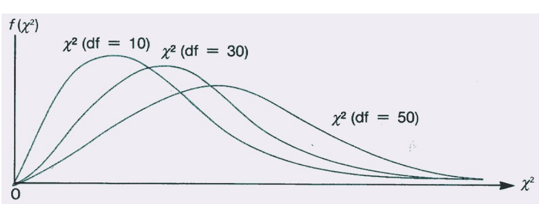
Hustota pravděpodobnosti rozdělení $\chi^2(n)$



68

68

CHI-KVADRÁT (PEARSONOVO) ROZDĚLENÍ (χ^2)



Pro f $\rightarrow \infty$ přechází Pearsonovo rozdělení v rozdělení normální.

69

69

F-ROZDĚLENÍ (FISHER – SNEDECOROVO)

F-rozdělení je definováno jako **poměr dvou nezávislých χ^2 rozdělení** a jejich **stupňů volnosti f_1, f_2** podle vztahu

$$F = \frac{\chi^2_{f_1}/f_1}{\chi^2_{f_2}/f_2}$$

střední hodnota $\mu = \frac{f_2}{f_2 - 2}$ *pro $f_2 > 2$*

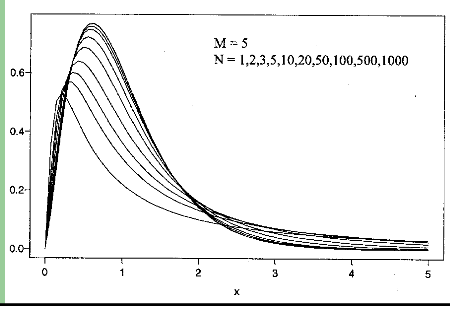
rozptyl $\sigma^2 = \frac{2f_2^2(f_1 + f_2 - 2)}{f_1(f_2 - 2)^2(f_2 - 4)}$ *pro $f_2 > 4$*

70

70

F-ROZDĚLENÍ (FISHER – SNEDECOROVO)

Hustota pravděpodobnosti F-rozdělení F(*M*, *N*)

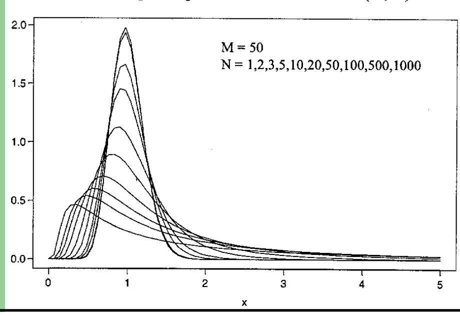


71

71

F-ROZDĚLENÍ (FISHER – SNEDECOROVO)

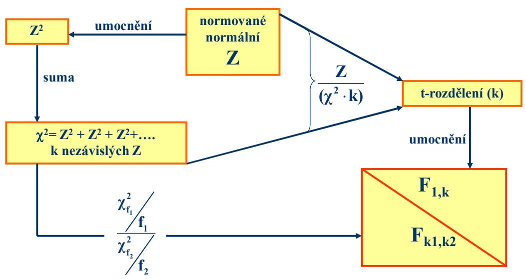
Hustota pravděpodobnosti F-rozdělení F(*M*, *N*)



72

72

VZTAHY MEZI ZÁKLADNÍMI STATISTICKÝMI ROZDĚLENÍMI

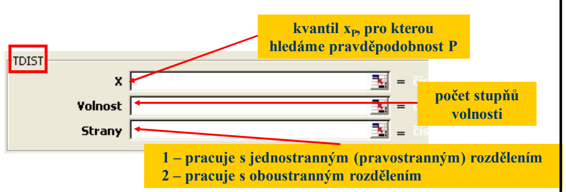


73

73

t-ROZDĚLENÍ V EXCELU

❶ **hledání příslušné pravděpodobnosti P pro zadaný kvantil**

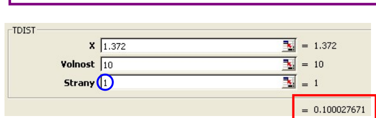


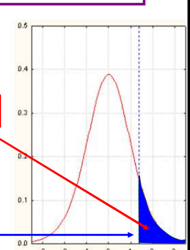
74

74

t-ROZDĚLENÍ V EXCELU – příklad 1

Máme jednostranné t-rozdělení s 10 stupni volnosti. Jakým kvantilem je hodnota 1,372?





Hodnota 1.372 je **90 % kvantil**.

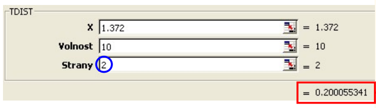
Přesahuje jej 10 % hodnot tohoto rozdělení

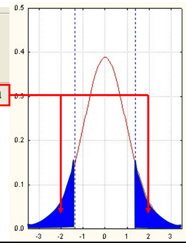
75

75

t-ROZDĚLENÍ V EXCELU – příklad 1

Máme oboustranné t-rozdělení s 10 stupni volnosti. Jakým kvantilem je hodnota 1,372?





Hodnota 1.372 je 80 % **kvantil**.

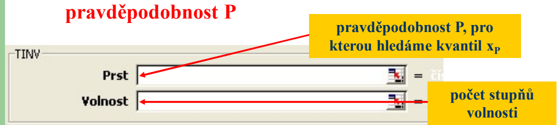
Hodnotu 1.372 přesahuje 10 % hodnot a hodnotu –1.372 nedosahuje 10 % tohoto rozdělení

76

76

t-ROZDĚLENÍ V EXCELU

❷ **hledání příslušného kvantilu pro zadanou pravděpodobnost P**



V případě, že pracujeme **s jednostranným rozdělením** (např. u jednostranných testů nebo jednostranných intervalů spolehlivosti), musíme **zadat dvojnásobnou pravděpodobnost**, např. pro jednostranný t-test a pro $\alpha = 0.05$ musíme zadat hodnotu 0.10!!

Při použití **oboustranného rozdělení** (např. u oboustranných testů) se automaticky **najde kvantil pro P/2**, např. pro oboustranný t-test pro $\alpha = 0.05$ se automaticky najdou kvantily pro $\alpha/2 = 0.025$.

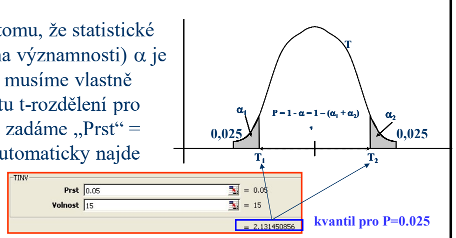
77

77

t-ROZDĚLENÍ V EXCELU – příklad 2

Najděte kvantil $t_{\alpha/2}$ pro $\alpha = 0.05$ pro t-rozdělení s 15 stupni volnosti pro výpočet oboustranného intervalu spolehlivosti

Vzhledem k tomu, že statistické riziko (hladina významnosti) α je **celkem 0,05**, musíme vlastně hledat hodnotu t-rozdělení pro 0,025. Pokud zadáme „Prst“ = 0,05, Excel automaticky najde hodnotu $t_{\alpha/2}$.



78

78

POROVNÁNÍ t-ROZDĚLENÍ (oboustranného) A N(0,1) V EXCELU

TINV

Prst 0.05 = 0.05

Volnost 100000 = 100000

= 1.959988367

1.96 je ve skutečnosti kvantil pro P = 0.025 !!

Ve funkci TINV počet st. volnosti = 100000 simuluje „nekonečný" počet st. volnosti, pro který t-rozdělení přechází v normované normální rozdělení

kvantily jsou stejné

NORMSINV

Prst 0.975 = 0.975

= 1.959961082

U normovaného normálního rozdělení zadáváme skutečně P = 0.025 (1 - 0.975 = 0.025)

79

79

χ^2 ROZDĚLENÍ V EXCELU

❶ hledání příslušné pravděpodobnosti P pro zadaný kvantil

CHIDIST

X

Volnost

kvantil x_P, pro kterou hledáme pravděpodobnost P

počet stupňů volnosti

80

80

χ^2 ROZDĚLENÍ V EXCELU

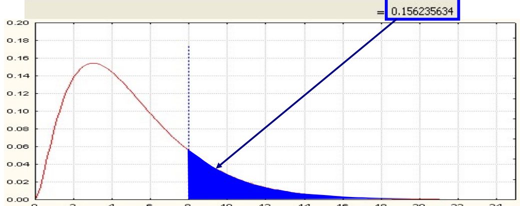
Jaká je pravděpodobnost překročení kvantilu $\chi^2 = 8$, $df = 5$?

CHIDIST

X 8 = 8

Volnost 5 = 5

= 0.156235634

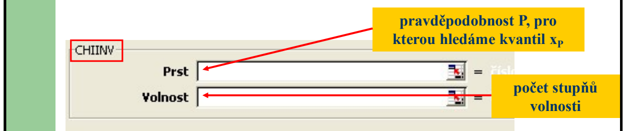


81

81

χ^2 ROZDĚLENÍ V EXCELU

❷ hledání příslušného kvantilu pro zadanou pravděpodobnost P

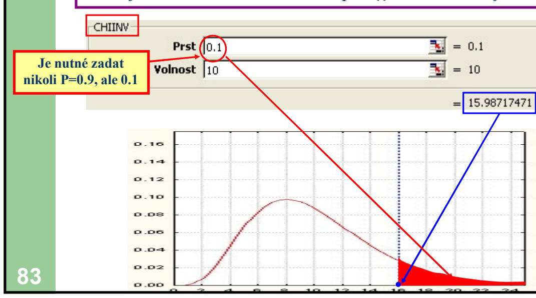


82

82

χ^2 ROZDĚLENÍ V EXCELU

Jaká je hodnota 90 % kvantilu pro χ^2 rozdělení, df = 10?



83

83

F ROZDĚLENÍ V EXCELU

Užívají se funkce FDIST a FINV naprosto stejným způsobem jako u χ^2 rozdělení, pouze se vkládají dvě hodnoty stupňů volnosti.

84

84