INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

ANALÝZA ROZPTYLU (ANOVA)

Vytvořeno s podporou projektu Průřezová inovace studijních programů Lesnické a dřevařské fakulty MENDELU v Brně (LDF) s ohledem na discipliny společného základu (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0021) za přispění finančních prostředků EU a státního rozpočtu České republiky.

ANALÝZA ROZPTYLU (ANOVA)

je **test shody středních hodnot pro více výběrů**

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$

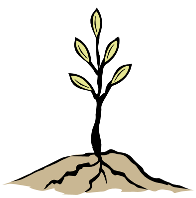
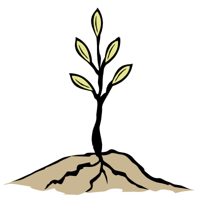
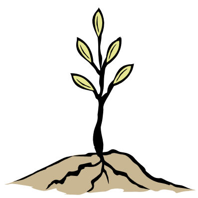
H_1: alespoň mezi dvěma středními hodnotami existuje statisticky významný rozdíl

POZOR! Nelze použít opakovaných t-testů, protože se pro simultánní hypotézu ($\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$) zvyšuje chyba I. druhu (α) pro *k* výběrů podle vztahu $\alpha_B = 1-(1-\alpha)^k$, např. pro 7 výběrů při hodnotě α pro jednotlivý test $\alpha=0,05$ je α_B (celková chyba I.druhu pro všechna srovnání dohromady) je $\alpha_B=1-(1-0,05)^7 =$ 0,302 (tedy celková chyba I. druhu vzroste na více než 30 %, tedy asi 6x, což je nepřijatelné).

ANOVA – motivační příklad

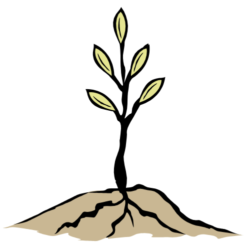
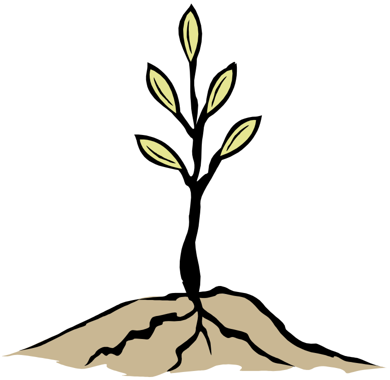
Zkoumáme vliv hnojení na růst semenáčků ve školce. Chceme zjistit, zda hnojení **prokazatelně** zvýší růst semenáčků.

H_0: hnojení **NEMÁ** vliv

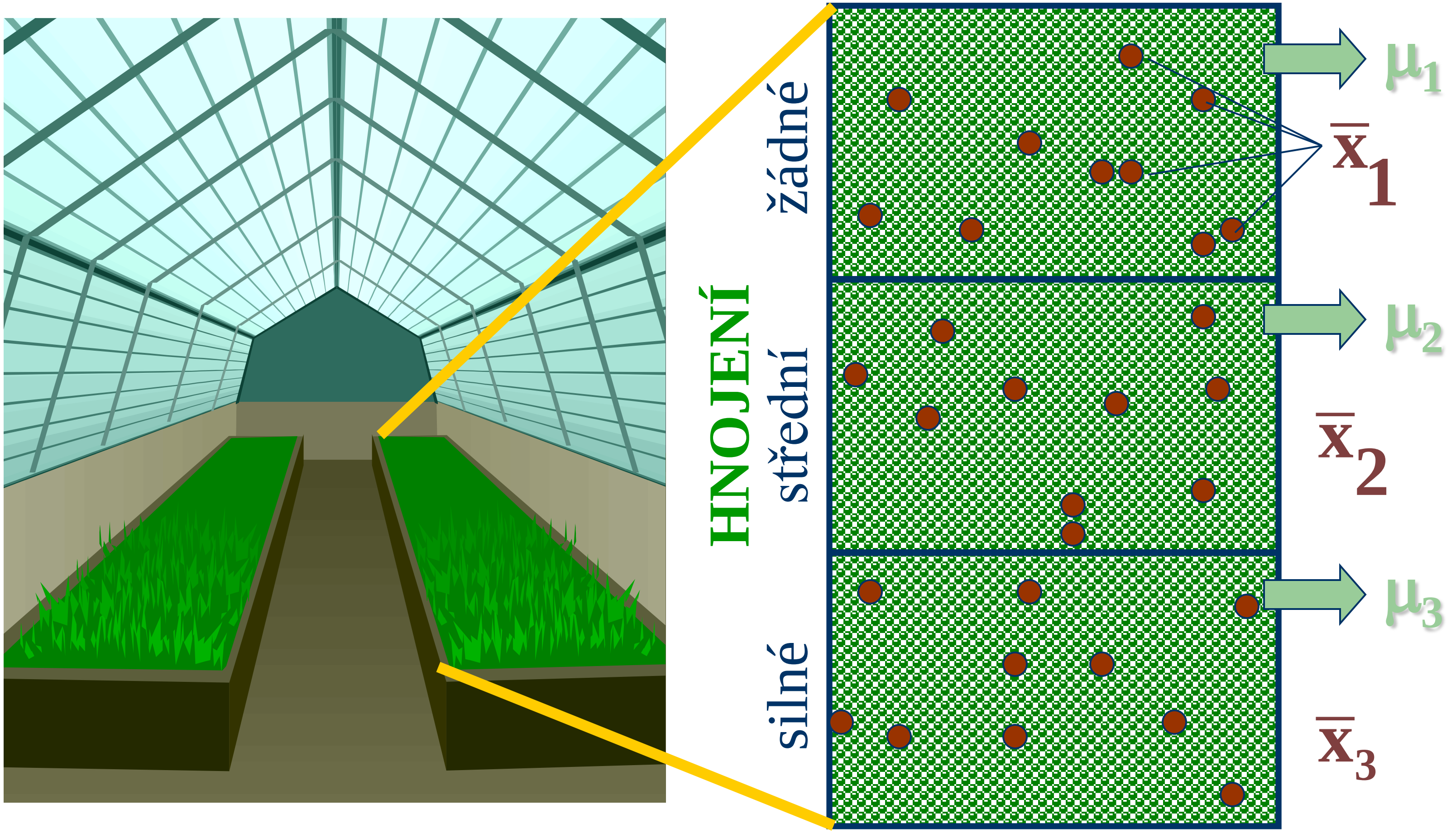




bez hnojení | střední hnojení | silné hnojení

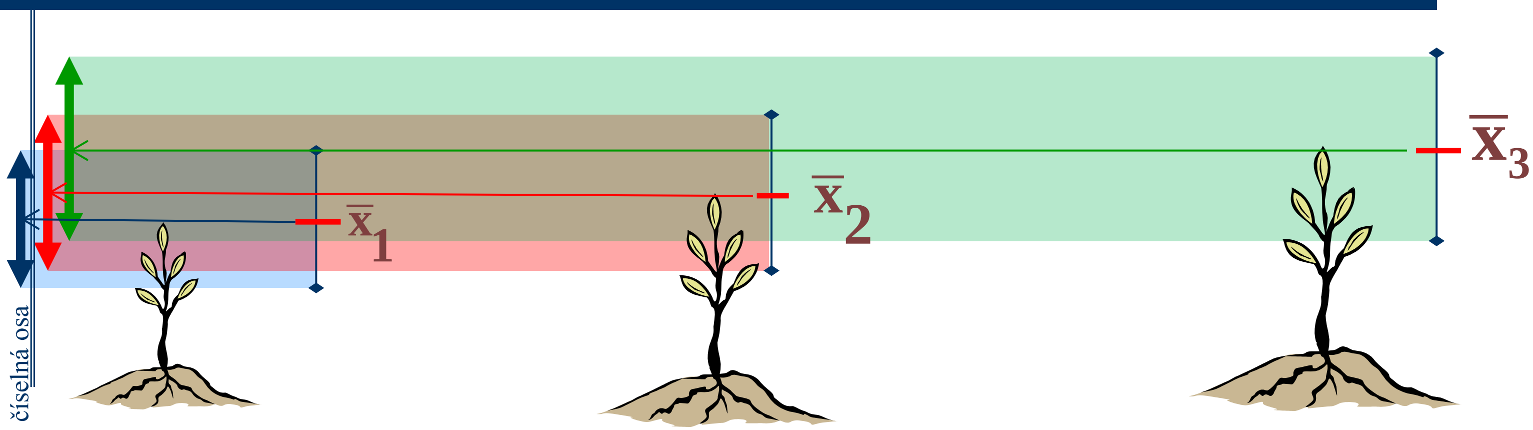
H_1: hnojení **MÁ** vliv

ANOVA – motivační příklad



ANOVA – motivační příklad

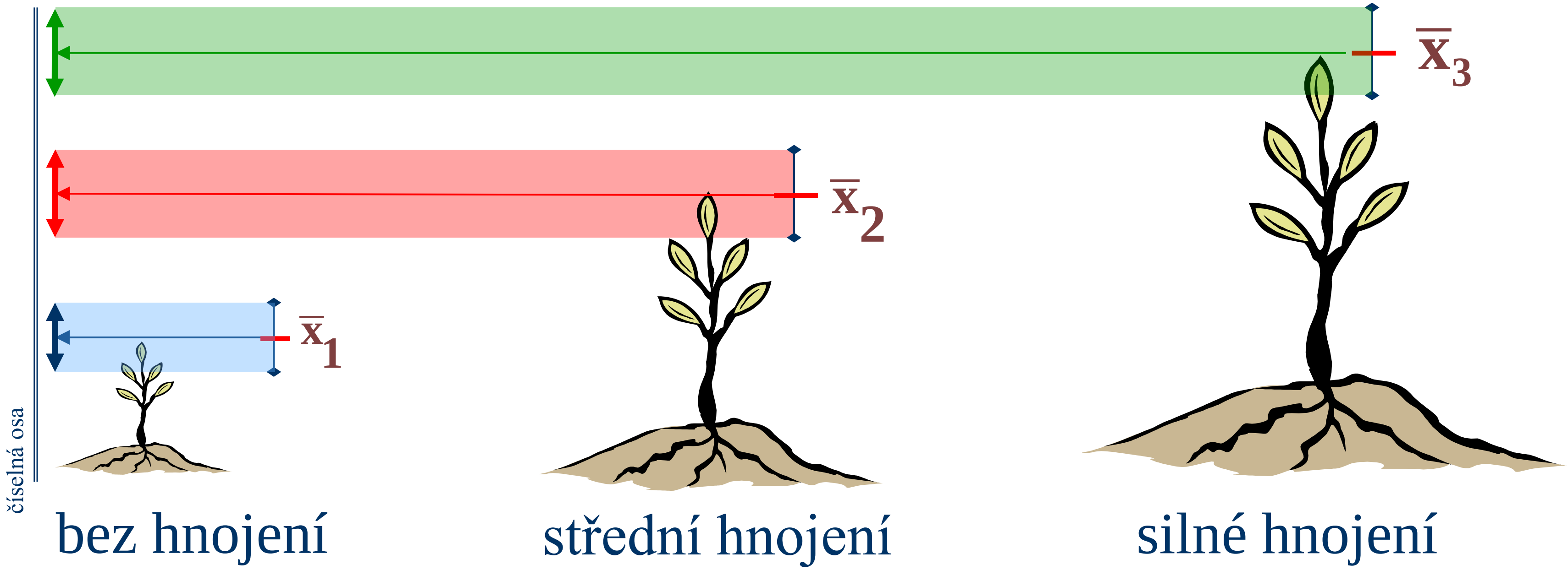


bez hnojení   střední hnojení   silné hnojení

H$_0$: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

Slabé šipky představují výběrové aritmetické průměry. Jsou rozdílné, ale tyto rozdíly mohou být náhodné (způsobeny konkrétními vybranými daty výběru). Pro srovnání středních hodnot základního souboru musíme vytvořit intervalové odhady. V tomto případě se všechny intervaly spolehlivosti (barevné pruhy) překrývají – znamená to, že nemůžeme vyloučit, že střední hodnoty všech základních výběrů jsou stejné. Jinak vyjádřeno, rozdíly mezi výběrovými průměry jsou náhodné a v základním souboru statisticky neprokazatelné.

ANOVA – motivační příklad



H_1: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

V tomto případě se intervaly spolehlivosti (barevné pruhy) nepřekrývají – znamená to, že střední hodnoty všech základních výběrů nemohou být stejné (s danou pravděpodobností). Jinak vyjádřeno, rozdíly mezi výběrovými průměry jsou nenáhodné a v základním souboru statisticky prokazatelné.

ANOVA - motivační příklad

Princip porovnání středních hodnot základních souborů popsaný na předchozích snímcích je možný, ale zvláště při porovnávání velkého množství středních hodnot velmi výpočetně a časově náročný.
Proto byla vyvinuta metoda analýza rozptylu, která jedním testem zjistí pro teoreticky neomezený počet střeních hodnot, zda je možné tyto střední hodnoty v základním souboru považovat za shodné nebo nikoliv.
Na následujících snímcích je popsán princip analýzy rozptylu.

PRINCIP ANALÝZY ROZPTYLU

ANOVA analyzuje zdroje variability u lineárních statistických modelů. Je založena na rozkladu celkové variability pokusu na dvě složky:

CELKOVÁ VARIABILITA
(míra variability celého pokusu)

- **MEZIVÝBĚROVÁ VARIABILITA**
  (ta část celkové variability, která se projevuje jako rozdíl mezi výběrovými průměry a obvykle se její vznik připisuje působení studovaného faktoru
- **VNITROVÝBĚROVÁ VARIABILITA**
  (ta část celkové variability, která která se projevuje jako rozdíl mezi měřenými hodnotami a výběrovými průměry a je vysvětlovaná náhodným kolísáním měřených hodnot uvnitř výběrů a příčiny tohoto kolísání nejsou známy

PRINCIP ANALÝZY ROZPTYLU

Obrázky na následujících dvou snímcích představují tři výběry s výběrovými průměry $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ a $\bar{x}_3$. Na základě těchto dat chceme posoudit, zda tyto výběry pochází ze základních souborů se stejnými (nulová hypotéza) nebo rozdílnými středními hodnotami μ_1 μ_2 a μ_3 (alternativní hypotéza). Řešení je založeno na rozkladu celkové variability podle schématu na předchozím snímku.

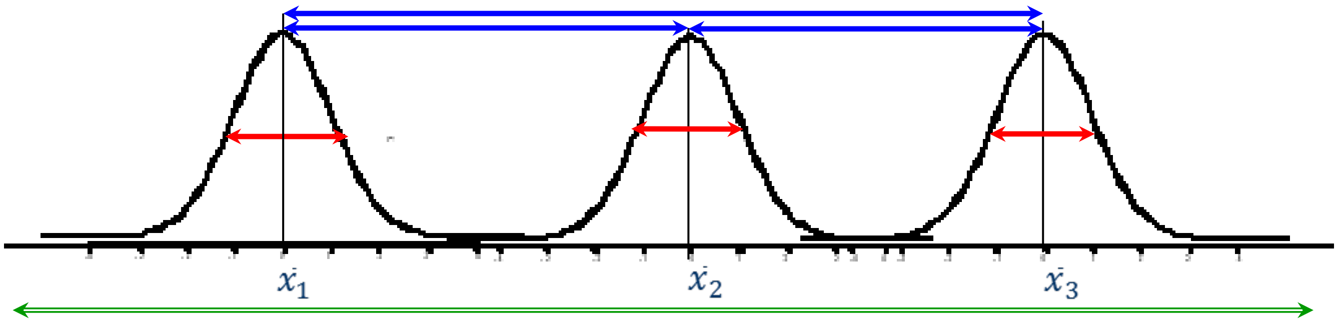
Celková variabilita (zelená šipka) je dána **rozptýlením všech hodnot všech výběrů**.

Variabilita mezi výběry (modré šipky) je dána **rozdíly mezi středními hodnotami**

Variabilita uvnitř výběrů (červené šipky) je dána **rozptýlením měřených hodnot okolo svých středních hodnot v rámci každého výběru.**

Základním principem ANOVy je POROVNÁNÍ ROZPTYLŮ (míry variability) **MEZI VÝBĚRY** („modrý rozptyl“) a **UVNITŘ VÝBĚRŮ** („červený rozptyl“)

PRINCIP ANALÝZY ROZPTYLU

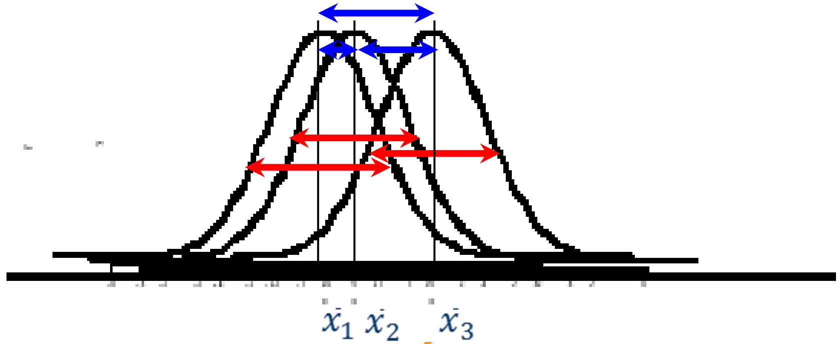


Zde je mezivýběrová variabilita velká ve srovnání s vnitrovýběrovou. Znamená to, že výběrové průměry jsou poměrně daleko od sebe a jednotlivá rozdělení se příliš nepřekrývají. Je tedy pravděpodobné, že i střední hodnoty základních souborů, ze kterých tyto výběry pocházejí, budou odlišné.

Poměr „modrého“ a „červeného“ rozptylu (testové kritérium ANOVy) bude relativně vysoké číslo (mezivýběrový rozptyl je několikanásobně vyšší než vnitrovýběrový), tedy nulová hypotéza o rovnosti středních hodnot bude pravděpodobně zamítnuta.

Pokud je mezivýběrová variabilita VELKÁ ve srovnání s vnitrovýběrovou variabilitou, znamená to, že s vysokou pravděpodobností se STŘEDNÍ HODNOTY POROVNÁVANÝCH ZÁKLADNÍCH SOUBORŮ LIŠÍ

PRINCIP ANALÝZY ROZPTYLU



Zde je mezivýběrová variabilita **MALÁ** ve srovnání s vnitrovýběrovou. Znamená to, že výběrové průměry jsou velmi blízko a jednotlivá rozdělení se značně překrývají. V podstatě každý výběrový průměr může patřit do kteréhokoliv výběru. Je tedy pravděpodobné, že i střední hodnoty základních souborů, ze kterých tyto výběry pocházejí, nebudou odlišné. Poměr „modrého“ a „červeného“ rozptylu (testové kritérium ANOVy) bude relativně malé číslo (mezivýběrový rozptyl bude velmi podobný vnitrovýběrovému nebo dokonce menší), tedy nulová hypotéza o rovnosti středních hodnot nebude pravděpodobně zamítnuta.

Pokud je mezivýběrová variabilita MALÁ ve srovnání s vnitrovýběrovou variabilitou, znamená to, že s vysokou pravděpodobností se STŘEDNÍ HODNOTY POROVNÁVANÝCH ZÁKLADNÍCH SOUBORŮ NELIŠÍ

ANOVA – vztah ke dvojvýběrovým testům

2 výběry	⇒	3 a více výběrů
t – test nezávislé výb.	⇒	ANOVA
t – test závislé výb.	⇒	ANOVA opakovaná měření
Mann-Whitneyův	⇒	Kruskal-Wallisův test

ANOVA - typy

- ANOVA
  - parametrická
    - jednofaktorová
      - s pevnými efekty
      - s náhodnými efekty
    - vícefaktorová
      - s pevnými efekty
      - s náhodnými efekty
      - se smíšenými efekty
  - neparametrická

VÍCEFAKTOROVÁ ANOVA

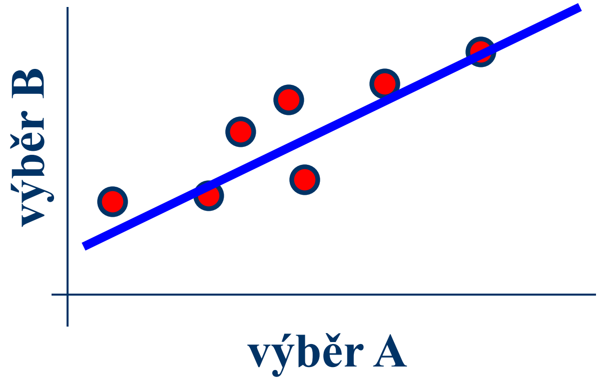
- **PEVNÉ efekty – úrovně faktorů jsou pevně dány a nás zajímají rozdíly právě mezi nimi**
- **NÁHODNÉ efekty – úrovně faktorů jsou náhodně vybrány (mohou být v každém pokusu jiné)**
- **SMÍŠENÉ efekty – část faktorů je pevných, část smíšených**

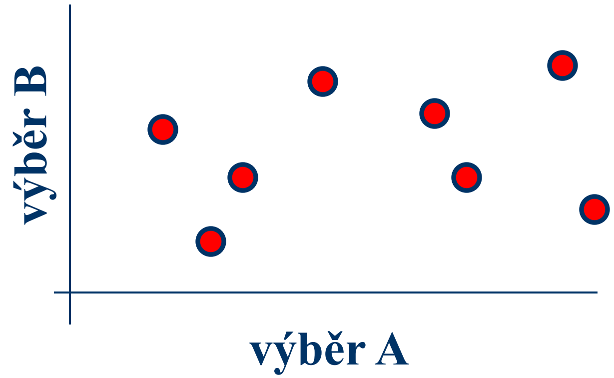
ANOVA - podmínky použití
(základní parametrická ANOVA)

- všechny porovnávané výběry (skupiny) jsou **nezávislé**
- výběry pocházejí ze základních souborů s **normálním rozdělením**
- všechny výběry pocházejí ze základních souborů se **shodnými rozptyly**

ANOVA – ověření podmínek

- **nezávislost** – graf závislosti jednotlivých proměnných





výběry A a B jsou závislé **výběry A a B jsou NEzávislé**

- **normalita** – testy normality
- **homoskedasticita** – testy shody rozptylů pro více výběrů
  - Cochranův test – pro stejné velikosti výběrů,
  - Barttletův test – pro různé velikosti výběrů

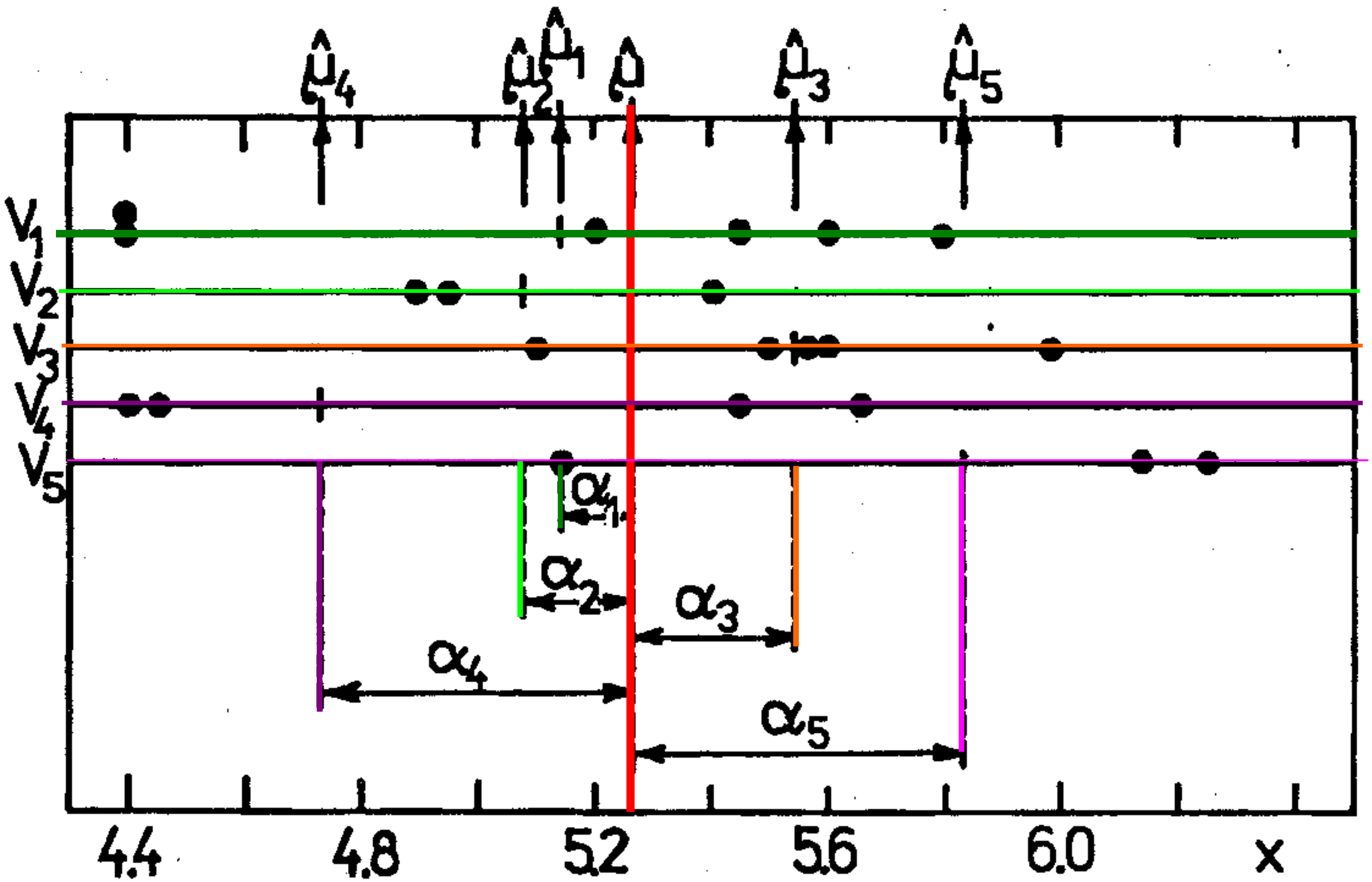
ANOVA – základní model

Model jednofaktorové ANOVY:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

MĚŘENÁ HODNOTA	PRŮMĚRNÁ HODNOTA	ZMĚNA MĚŘENÉ HODNOTY ZPŮSOBENÁ FAKTOREM	EXPERIMENTÁLNÍ CHYBA

ANOVA – základní model



JEDNOFAKTOROVÁ ANOVA (1-F ANOVA)

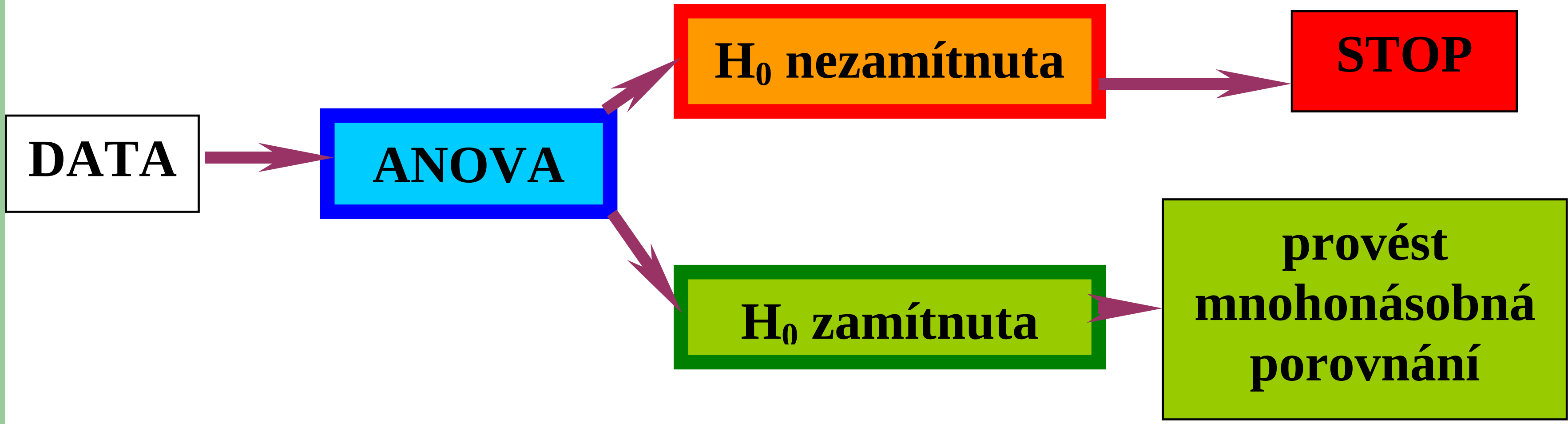
	Úroveň faktoru						Celkem
	A_1	A_2	...	A_i	...	A_k	
Opakování měření (jednotlivá pozorování)	x_{11}	x_{21}	...	x_{i1}	...	x_{k1}	
	x_{12}	x_{22}	...	x_{i2}	...	x_{k2}	
	...	...	...	...	...	...	
	...	...	...	...	...	...	
	x_{1n_1}	x_{2n_2}	...	x_{in_i}	...	x_{kn_k}	
skupinové průměry	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	...	$\bar{x}_i$	...	$\bar{x}_k$	$\bar{x}$
počet	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k	N

1-F ANOVA - tabulka výpočtu

Zdroj variability	Součet čtverců odchylek	Počet stupňů volnosti	Průměrný čtverec odchylek (rozptyl)	Testové kritérium
mezi skupinami	$S_G = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{x}_i - \overline{x}\right)^2$	$DF_G = k - 1$	$M_G = \dfrac{S_G}{DF_G}$	
uvnitř skupin (reziduální)	$S_R = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \overline{x}_i\right)^2$	$DF_R = N - k$	$M_R = \dfrac{S_R}{DF_R}$	$F = \dfrac{M_G}{M_R}$
Celkový	$S_C = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \overline{x}\right)^2$	$DF_C = N - 1$		

$$F > F_{\alpha,k-1,N-k} \Rightarrow H_1$$

1-F ANOVA – co dál?



1-F ANOVA – mnohonásobná porovnání

Odpovídají na otázku:

„Které konkrétní skupiny (výběry) pocházejí ze základních souborů, jejichž střední hodnoty se od sebe statisticky významně liší?

H_0: $\mu_A = \mu_B$, (A ≠ B) H_1: $\mu_A \neq \mu_B$

Porovnání se provádí pro všechny možné kombinace výběrů.

1-F ANOVA – mnohonásobná porovnání

Testy mnohonásobného porovnání:

- Fisherův
- **Tuckeyho**
- **Scheffeho**

a mnoho dalších …

$\bar{x}_1 \qquad \bar{x}_2 \qquad \bar{x}_3$

Testy pro porovnání s kontrolní skupinou:

- **Dunnetův**

$\bar{x}_1 \qquad \bar{x}_2 \qquad \bar{x}_K$

Tuckeyho test

H_0: $\mu_A = \mu_B$, (A ≠ B) H_1: $\mu_A \neq \mu_B$,

$$q = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{SE}$$

$$SE = \sqrt{\frac{M_R}{n}} \qquad SE = \sqrt{\frac{M_R}{2}\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}$$

Pokud platí, že **q** > **$q_{\alpha; N-k; k;}$ (kvantil studentizovaného rozpětí),** potom je rozdíl středních hodnot μ_A a μ_B statisticky významný

Scheffeho test

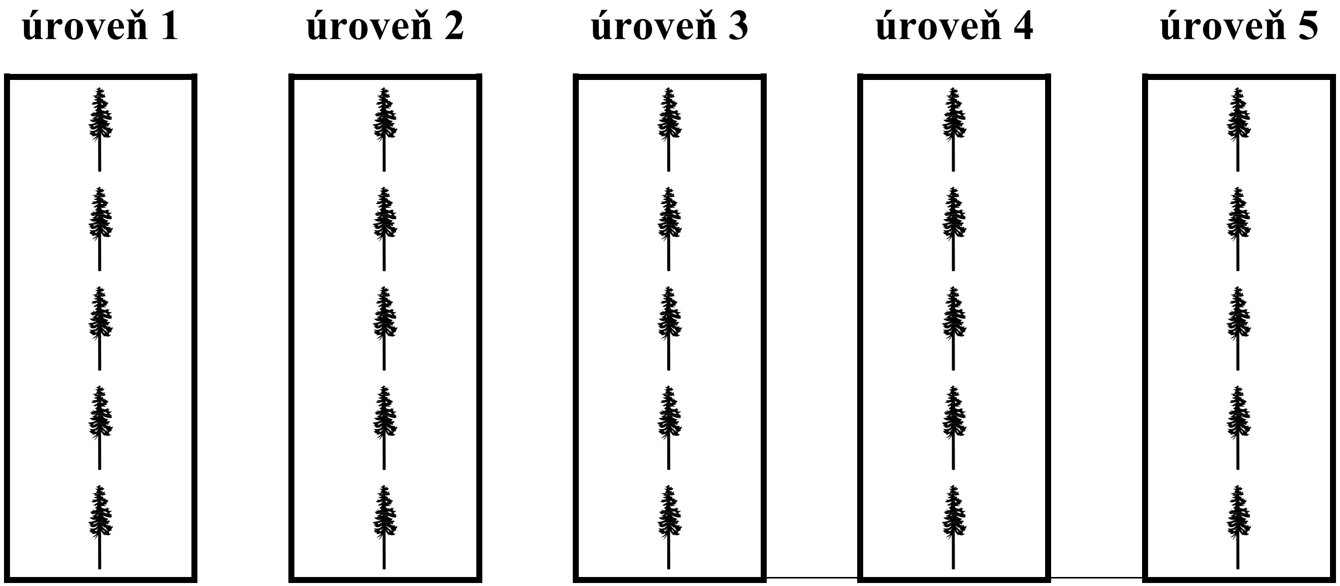
$\boldsymbol{H_0}$**:** $\boldsymbol{\mu_A = \mu_B}$ **,** $(A \neq B)$ **H**$_1$**:** $\boldsymbol{\mu_A \neq \mu_B}$**,**

$$S = \frac{\left| \overline{x}_A - \overline{x}_B \right|}{SE} \qquad SE = \sqrt{M_R \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)}$$

Pokud platí, že S > $S_\alpha = \sqrt{(k-1) \cdot F_{\alpha;k-1;N-k}}$ potom je rozdíl středních hodnot μ_A a μ_B statisticky významný

1-F ANOVA - příklad

Při výzkumu účinků hnojení na růst semenáčků v lesní školce byly zkoušeny různé dávky hnojiva. Rozhodněte, zda dávky hnojiva mají významný vliv na výškový růst semenáčků.



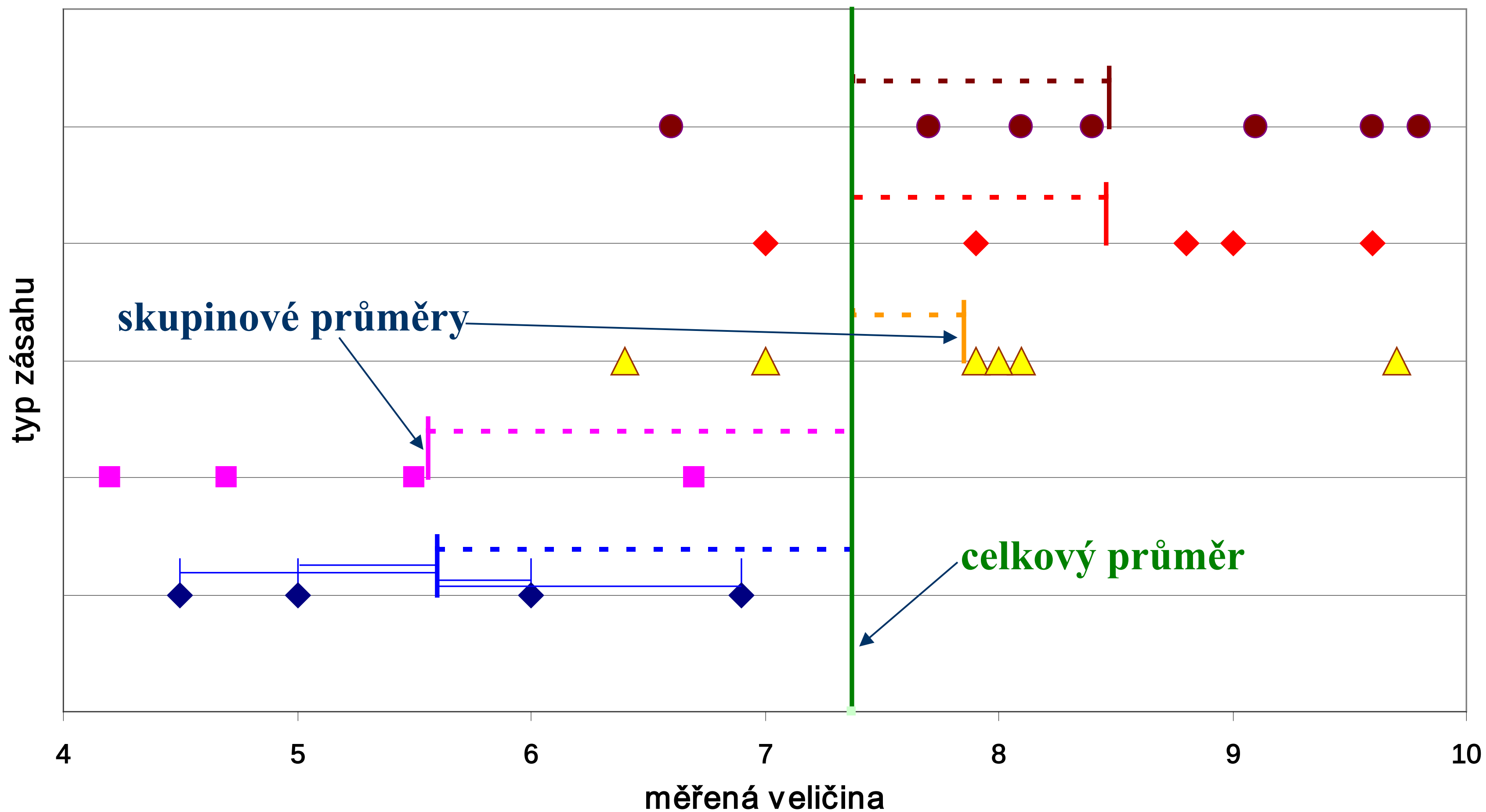
1-F ANOVA - příklad

	úroveň 1	úroveň 2	úroveň 3	úroveň 4	úroveň 5
Výška semenáčků	6.0	6.7	7.9	9.0	9.8
	6.9	6.7	6.4	7.0	9.6
	5.0	5.5	8.1	7.9	9.1
	4.5	4.2	7.0	8.8	6.6
		4.7	8.0	9.6	7.7
			9.7		8.1
					8.4

1-F ANOVA - příklad

	U1	U2	U3	U4	U5
Výška semenáčků	6.0	6.7	7.9	9.0	9.8
	6.9	6.7	6.4	7.0	9.6
	5.0	5.5	8.1	7.9	9.1
	4.5	4.2	7.0	8.8	6.6
		4.7	8.0	9.6	7.7
			9.7		8.1
					8.4
Skupinové průměry	5.60	5.56	7.85	8.46	8.47
Celkový průměr	7.37				
Počet	4	5	6	5	7

1-F ANOVA - příklad



1-F ANOVA - příklad

Zdroj variability	Součet čtverců odchylek
mezi skupinami	$S_G = \sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$
uvnitř skupin (reziduální)	$S_R = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$

$$S_G = 4.(5{,}60-7{,}37)^2 + 5.(5{,}56-7{,}37)^2 + \\ + 6.(7{,}85-7{,}37)^2 + 5.(8{,}46-7{,}37)^2 + \\ + 7.(8{,}47-7{,}37)^2 = \boxed{44.73}$$

	U1	U2	U3	U4	U5
Výška semenáčků	6.0	6.7	7.9	9.0	9.8
	6.9	6.7	6.4	7.0	9.6
	5.0	5.5	8.1	7.9	9.1
	4.5	4.2	7.0	8.8	6.6
		4.7	8.0	9.6	7.7
			9.7		8.1
					8.4
Skupinové průměry	5.60	5.56	7.85	8.46	8.47
Celkový průměr			7.37		
Počet	4	5	6	5	7

$$S_R = (6{,}00-5{,}60)^2 + (6{,}90-5{,}60)^2 + \\ + (5{,}00-5{,}60)^2 + (4{,}50-5{,}60)^2 + \ldots + \\ + \ldots + (8{,}40-8{,}47)^2 = \boxed{26{,}77}$$

1-F ANOVA - příklad

	U1	U2	U3	U4	U5
Výška semenáčků	6.0	6.7	7.9	9.0	9.8
	6.9	6.7	6.4	7.0	9.6
	5.0	5.5	8.1	7.9	9.1
	4.5	4.2	7.0	8.8	6.6
		4.7	8.0	9.6	7.7
			9.7		8.1
					8.4
Skupinové průměry	5.60	5.56	7.85	8.46	8.47
Celkový průměr	7.37				
Počet	4	5	6	5	7

Zdroj variability	Součet čtverců odchylek	Počet stupňů volnosti	Průměrný čtverec odchylek (rozptyl)	Testové kritérium
mezi skupinami	**44,73**	$\mathbf{DF_G = k - 1 = 4}$	$M_G = \frac{S_G}{DF_G} = \mathbf{11{,}182}$	$F = \frac{M_G}{M_R} = \mathbf{9{,}19}$
uvnitř skupin (reziduální)	**26,77**	$\mathbf{DF_R = N - k = 22}$	$M_R = \frac{S_R}{DF_R} = \mathbf{1{,}217}$	

1-F ANOVA - příklad

Testové kritérium: 9,19

Kritická hodnota: FINV (0,05;4;22) = 2,82

9,19 > 2,82 ⇒ nulová hypotéza zamítnuta

⇓

znamená to, že **nejméně mezi dvěma úrovněmi hnojení** je statisticky významný rozdíl ve výškovém růstu semenáčků

Další otázka zní: mezi kterými úrovněmi?? ⇒ testy mnohonásobného porovnání

1-F ANOVA - příklad

Tuckeyho test mnohonásobného porovnání:

Srovnání	Rozdíl	SE	Vypočítané q	Tabulkové q	Výsledek
U2 - U5	-2.91	0.65	6.02	4.20	Zamítáme
U2 - U4	-2.90	0.70	6.00	4.20	Zamítáme
U2 - U3	-2.29	0.67	4.74	4.20	Zamítáme
U2 - U1	-0.04	0.74	0.08	4.20	Nezamítá
U1 - U5	-2.87	0.69	5.94	4.20	Zamítáme
U1 - U4	-2.86	0.74	5.92	4.20	Zamítáme
U1 - U3	-2.25	0.71	4.66	4.20	Zamítáme
U3 - U5	-0.62	0.61	1.29	4.20	Nezamítá
U3 - U4	-0.61	0.67	1.26	4.20	Nezamítá
U4 - U5	-0.01	0.65	0.02	4.20	Nezamítá

1-F ANOVA - příklad

Tuckeyho test mnohonásobného porovnání:

Skupina	Příp.	Průměr	U2	U1	U3	U4	U5
U2	5	5.56			*	*	*
U1	4	5.60			*	*	*
U3	6	7.85	*	*			
U4	5	8.46	*	*			
U5	7	8.47	*	*			

1-F ANOVA - příklad

Závěr:

1) na základě analýzy rozptylu na hladině významnosti α=0,05 bylo zjištěno, že rozdílné dávky hnojiva mají statisticky významný vliv na výškový růst semenáčků.

2) Test mnohonásobného porovnání určil 2 homogenní podskupiny - dávky U1 a U2, resp. dávky U3, U4 a U5. Pro zvýšení výškového růstu je možné doporučit použít dávku hnojiva U3, zvýšení dávky na U4 a U5 již nemá podstatný efekt.

3) Použití 5 dávek hnojiva vyvolalo pouze dvě statisticky odlišitelné reakce u měřené veličiny

NEPARAMETRICKÁ ANOVA

V případě, že nejsou závažným způsobem splněny podmínky pro parametrickou Anovu (normalita výběrů, homogenita rozptylů) a/nebo se jedná o velmi malé výběry, používá se neparametrická jednofaktorová Anova – **Kruskal-Wallisův test**.

Tento test je založen na pořadí hodnot. Má nižší sílu testu oproti parametrické Anově (tj. má silnější tendenci nezamítnout nulovou hypotézu).

NEPARAMETRICKÁ ANOVA - postup

- prvky všech výběrů (skupin) sloučíme do jednoho sdruženého výběru (musíme zachovat informaci o tom, ze kterého výběru který prvek pochází);
- prvky sdruženého výběru seřadíme podle velikosti od nejmenšího k nejvyššímu;
- takto seřazené prvky očíslujeme podle pořadí (nejmenší prvek dostane číslo 1, druhý nejmenší 2, atd), přičemž prvky stejné hodnoty obdrží průměrné pořadí těchto prvků;

NEPARAMETRICKÁ ANOVA - postup

původní data (nikoli pořadí!!)

V1	V2	V3
5	2	7
3	4	2
4	3	4
7		8

Vytvoření pořadí pro jednotlivé hodnoty:

Sdružený soubor	Pořadí neupravené	Pořadí upravené
2	1	1.5
2	2	1.5
3	3	3.5
3	4	3.5
4	5	6
4	6	6
4	7	6
5	8	8
7	9	9.5
7	10	9.5
8	11	11

pořadí hodnot pro další výpočty

V1	V2	V3
8	1.5	9.5
3.5	6	1.5
6	3.5	6
9.5		11
27	11	28

hodnoty R_i

NEPARAMETRICKÁ ANOVA - postup

Spočítáme testové kritérium:

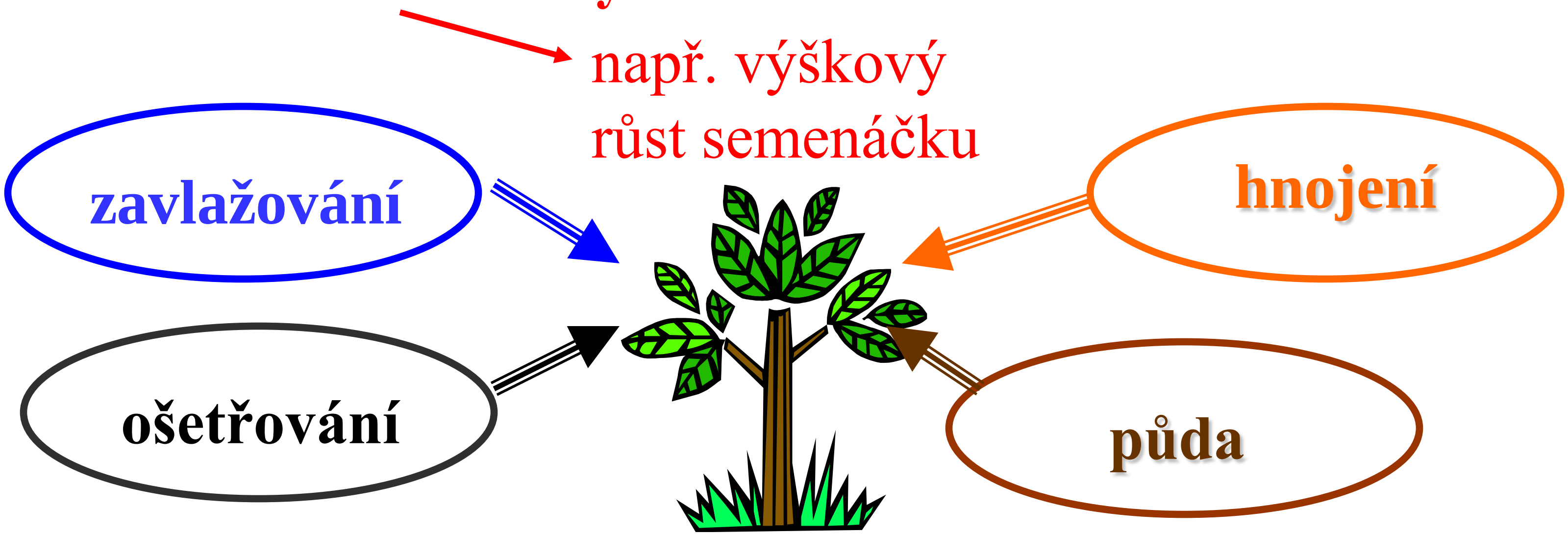
$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

Kritérium H porovnáme s kritickou hodnotou χ^2 pro *k*-*1* stupňů volnosti (pro velmi malé výběry speciální tabelované hodnoty – viz tabulka ve skriptech).

Používáme také testů mnohonásobného porovnání – upravený Tuckeyho test nebo Dunnův test (pro nestejně veliké výběry)

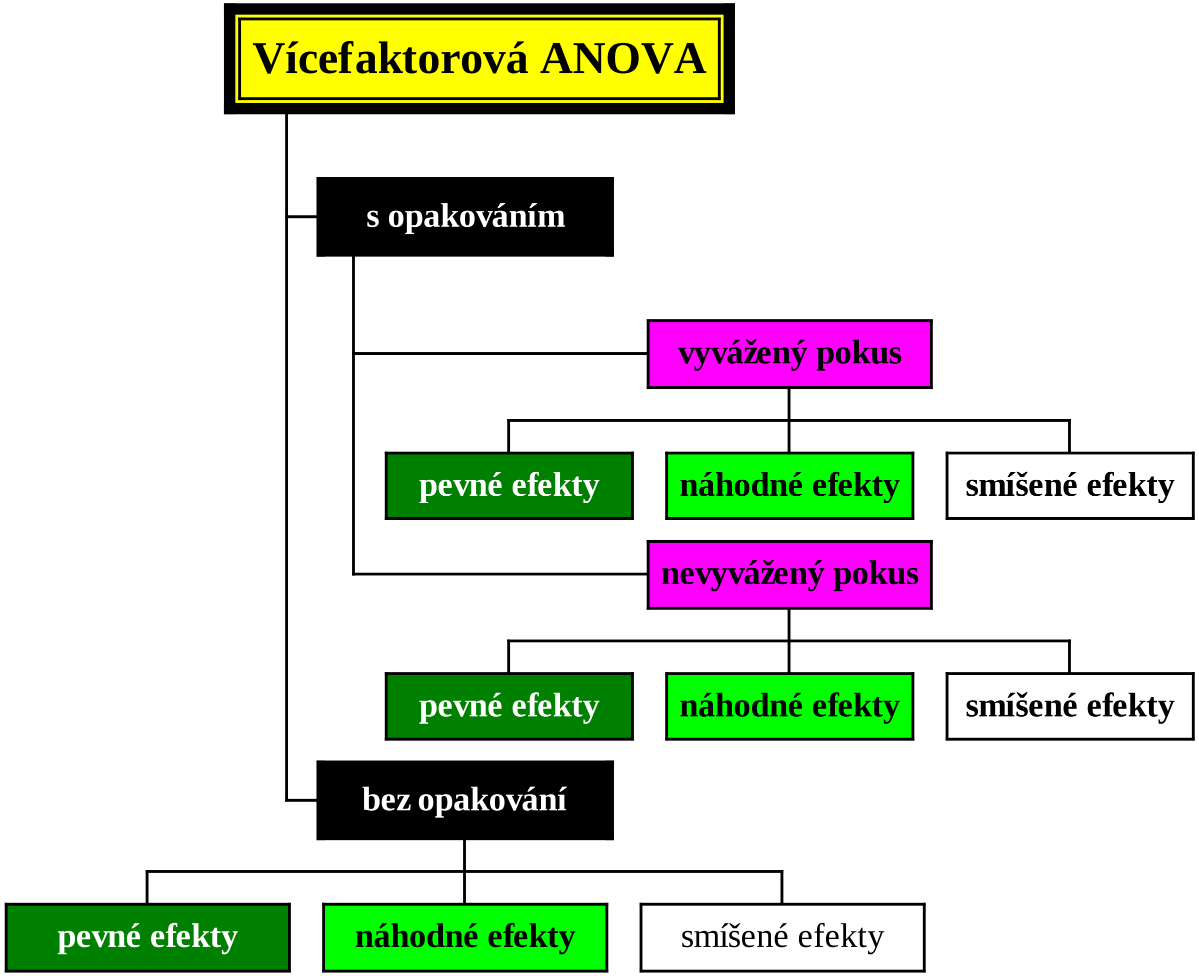
VÍCEFAKTOROVÁ ANOVA

je ANOVA, ve které zkoumáme vliv dvou a více faktorů na velikost měřené veličiny.



Nejobvyklejší je 2 – faktorová ANOVA (2-F). 3 - a více faktorové uspořádání je dnes dobře technicky řešitelné (statistické programy), ale obtížně interpretovatelné.

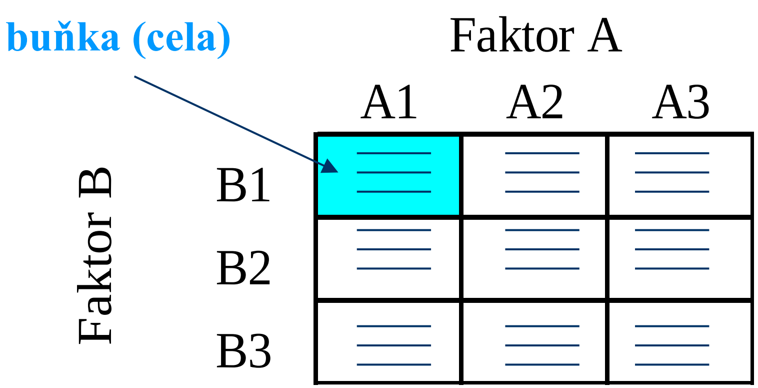
VÍCEFAKTOROVÁ ANOVA

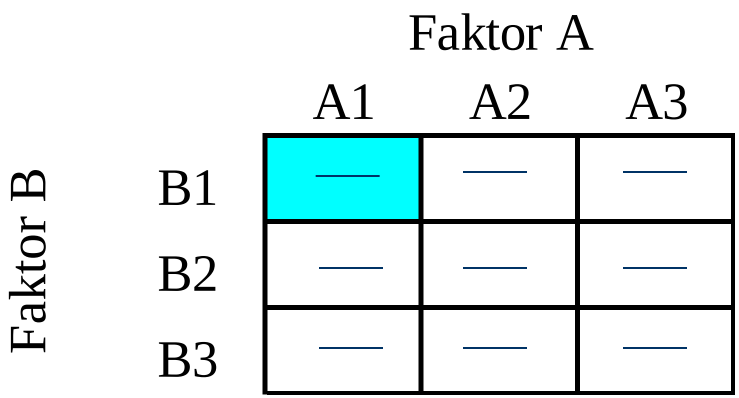


VÍCEFAKTOROVÁ ANOVA

ANOVA s opakováním – pro každou kombinaci úrovní faktorů existuje několik měřených hodnot

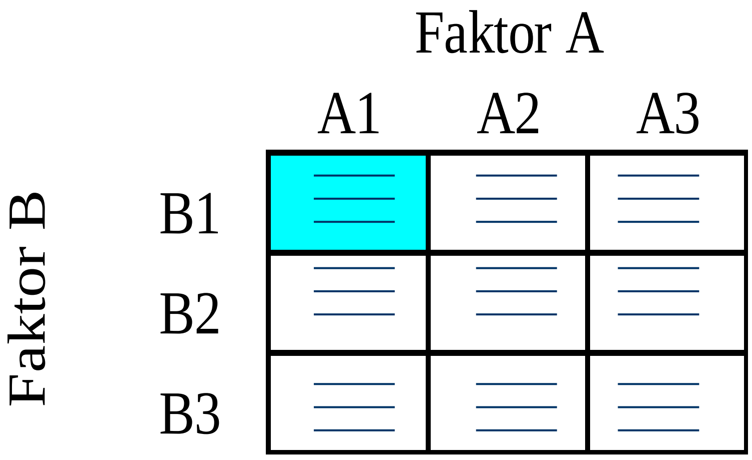
ANOVA bez opakování - pro každou kombinaci úrovní faktorů existuje jen jedna měřená hodnota



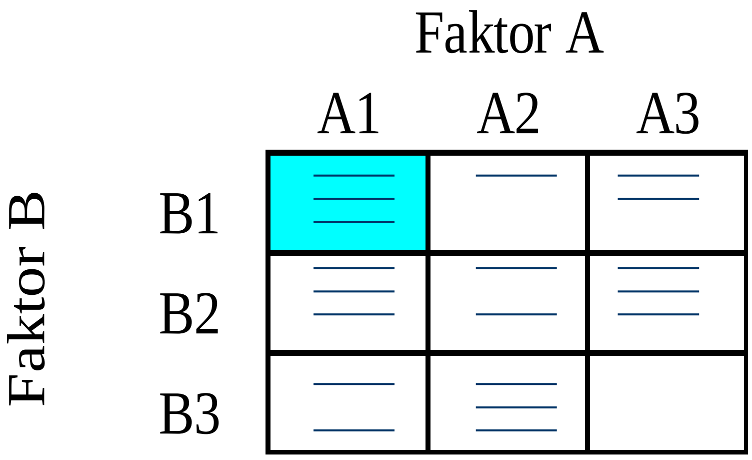


VÍCEFAKTOROVÁ ANOVA

vyvážené uspořádání – v každé buňce je stejný počet hodnot



nevyvážené uspořádání – v buňkách je různý počet hodnot



2-F ANOVA - model

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \left(\tau_{ij}\right) + \varepsilon_{ij}$$

y_{ij} **měřená hodnota (pozorování) v ovlivněná *i-tou* úrovní faktoru A a *j-tou* úrovní faktoru B**

μ **průměrná teoretická hodnota měřené veličiny**

α_i **vyjadřuje účinek úrovně A_i působícího faktoru A**

β_j **vyjadřuje účinek úrovně B_i působícího faktoru B**

τ_{ij} **interakce mezi faktory (tento člen je volitelný, protože mohou existovat modely s interakcí i bez interakce)**

ε_{ij} **náhodná chyba s $N(0,\sigma^2)$**

2-F ANOVA – rozklad variability

<table>
<tr><td colspan="4">CELKOVÁ VARIABILITA POKUSU</td></tr>
<tr><td colspan="3">Variabilita vysvětlená působením faktorů a interakce</td><td>Variabilita uvnitř buněk (náhodná složka variability nevysvětlená působením faktorů a interakce)</td></tr>
<tr><td>variabilita vysvětlená působením faktoru A</td><td>variabilita vysvětlená působením faktoru B</td><td>variabilita vysvětlená působením interakce</td><td></td></tr>
</table>

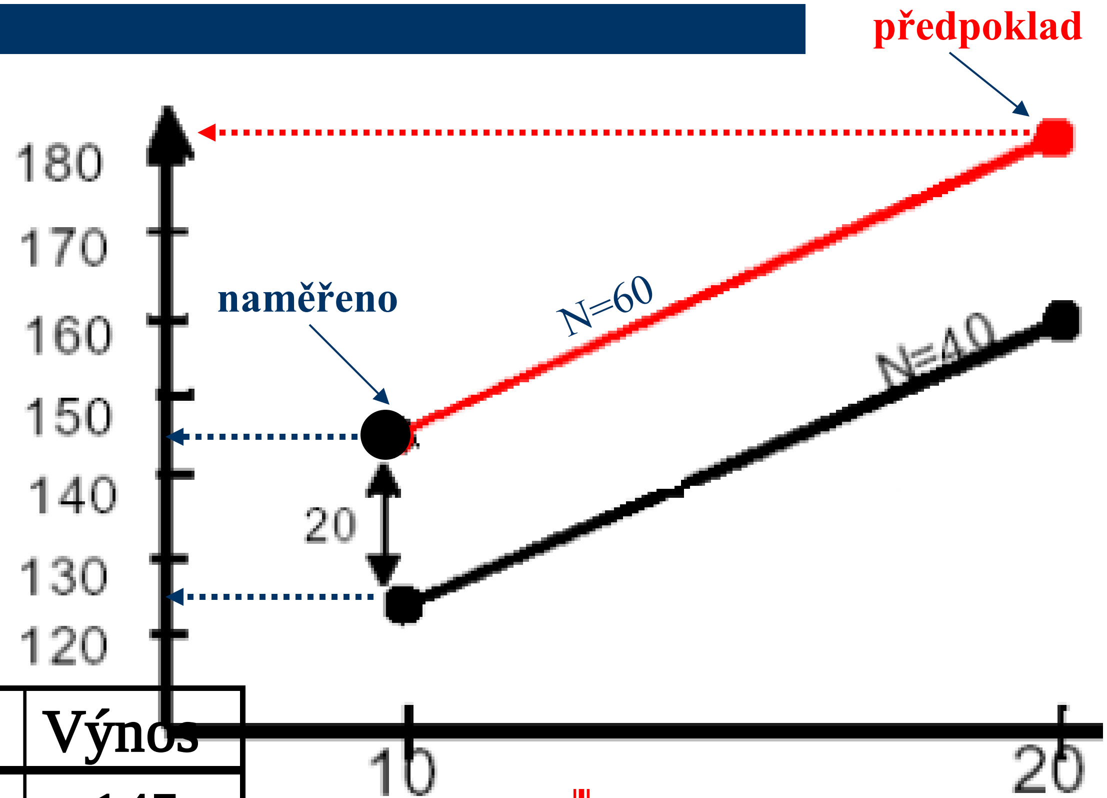
2-F ANOVA - interakce

Studie zkoumá účinek různých dávek dusíku (N) a fosforu (P) na výnos zemědělské plodiny. U obou prvků se předpokládají 2 úrovně – N (40, 60), P(10,20). V prvních třech pokusech byly získány následující výsledky:

Pokus	N	P	Výnos
T1	60	10	145
T2	40	10	125
T3	40	20	160

2-F ANOVA - interakce

Jaký bude výnos, pokud pro N = 60 zvýšíme dávku P na 20?



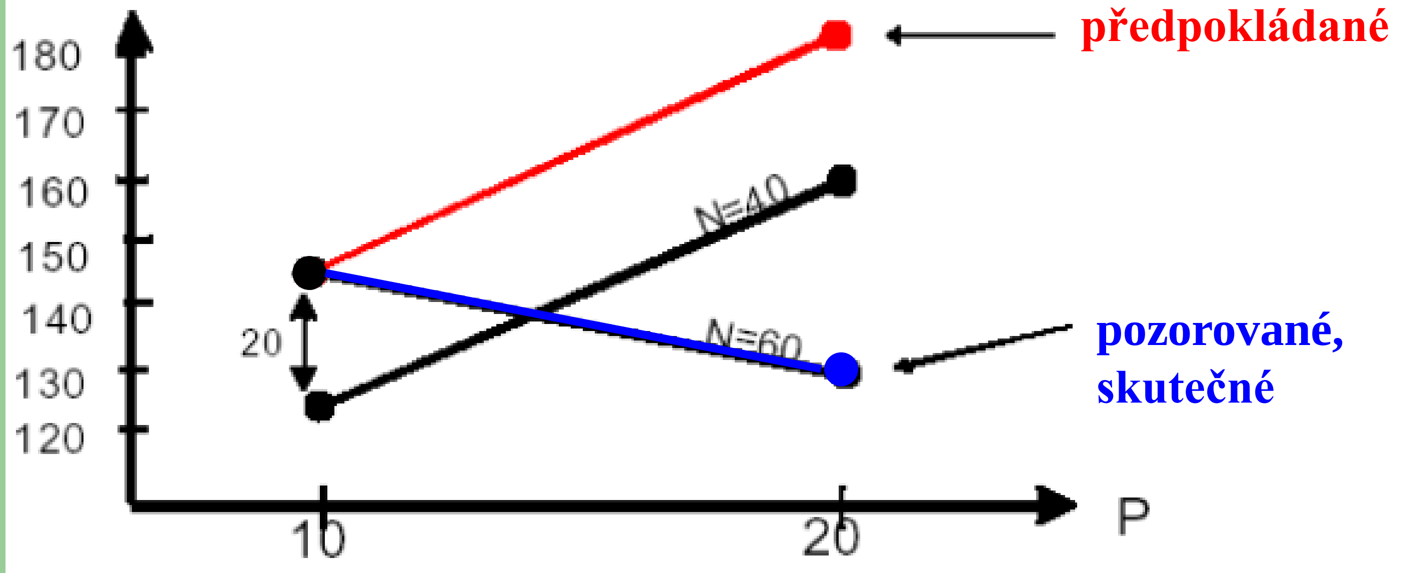
Pokus	N	P	Výnos
T1	60	10	145
T2	40	10	125
T3	40	20	160
T4	60	20	?

předpokládáme 180

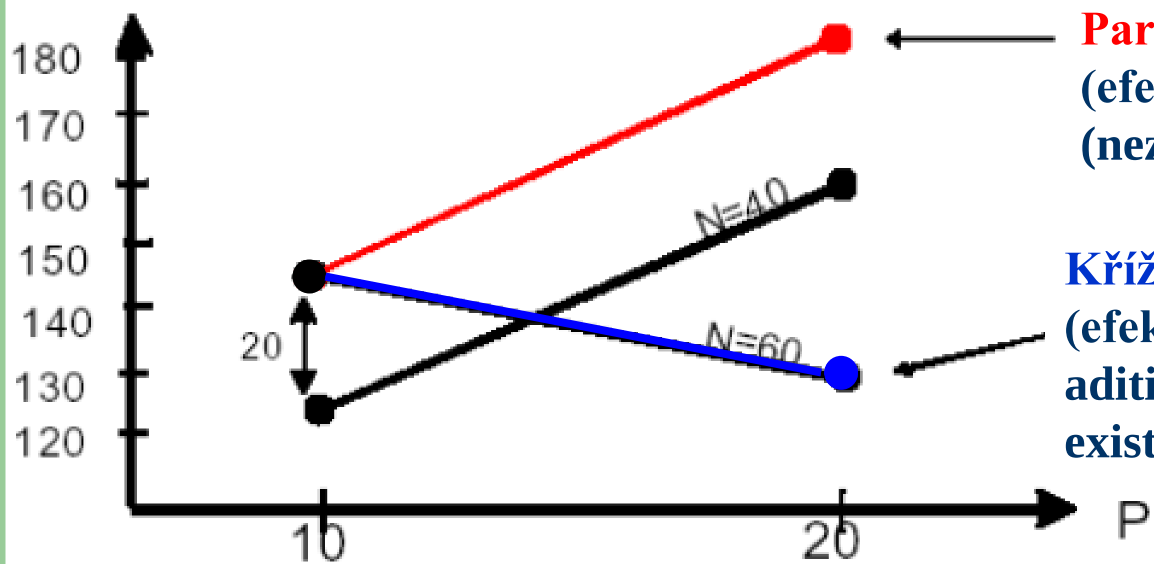
2-F ANOVA - interakce

Po provedení pokusu zjistíme:

Pokus	N	P	Výnos
T1	60	10	145
T2	40	10	125
T3	40	20	160
T4	60	20	130



2-F ANOVA - interakce



Paralelní čáry – působení (efekt) faktorů je aditivní (nezávislý)

Křížící se čáry – působení (efekt) faktorů není aditivní - mezi faktory existuje interakce

Interakce se vyskytuje tehdy, pokud **účinek jednoho faktoru není stejný při změně úrovní druhého faktoru**.

Faktory tedy nepůsobí nezávisle, ale reakce na působení jednoho faktoru je závislá na úrovni ostatních faktorů.

ANOVA – plánování experimentů

Plánovaný experiment (designed experiment, planned experiment) – je postup založený na statistickém testování **řízené změny (odstupňování) vstupních proměnných** analyzovaného procesu nebo systému, tak abychom byli schopni pozorovat a **identifikovat příčiny změny výstupní proměnné (proměnných)**

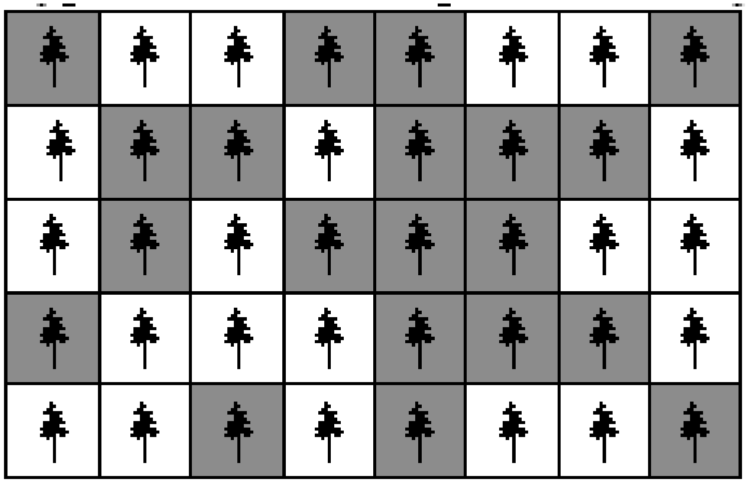
ANOVA – plánování experimentů

EXPERIMENTÁLNÍ JEDNOTKA (experimental unit - e.u., treatment unit) je nejmenší jednotka experimentu, na kterou je aplikována jedna úroveň faktoru (faktorů) nebo jejich kombinace

PRVEK (element) – je objekt, na kterém je měřena odezva

REPLIKACE, OPAKOVÁNÍ (replication) - opakování jednoho typu ošetření na experimentální jednotce

PLÁNOVÁNÍ EXPERIMENTŮ - replikace

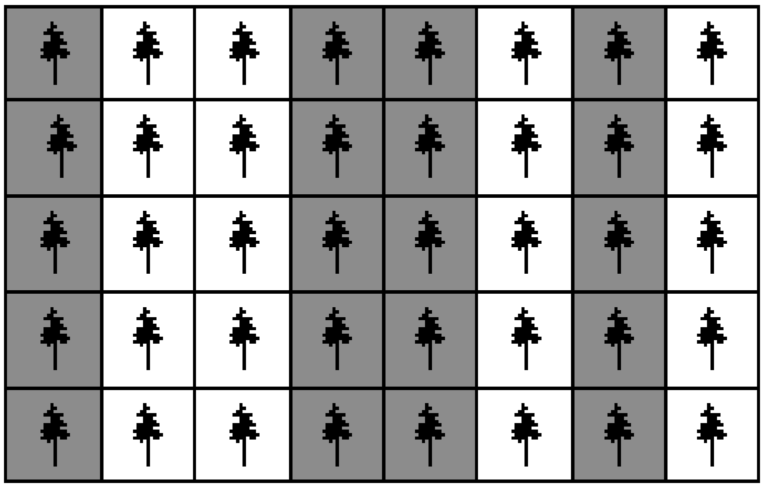


❶

každý strom je experimentální jednotkou

20 opakování

PLÁNOVÁNÍ EXPERIMENTŮ - replikace

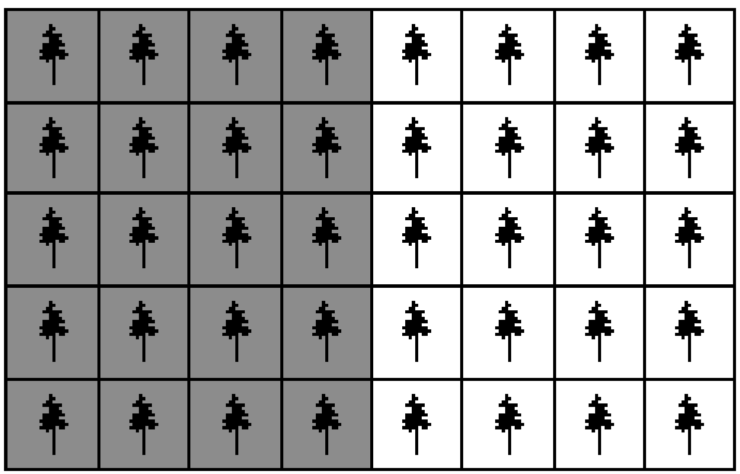


❷

řada stromů je experimentální jednotkou

4 opakování

PLÁNOVÁNÍ EXPERIMENTŮ - replikace



❸

část plochy (zde polovina) je experimentální jednotkou

bez opakování

PLÁNOVÁNÍ EXPERIMENTŮ - znáhodnění

CHYBA EXPERIMENTU

"chyba experimentální jednotky"
e.j. reaguje rozdílně na stejné ošetření

↓

způsobeno vnitřní variabilitou e.j. (neznámé nebo neuvažované vlivy)

⇓

ZNÁHODNĚNÍ

technická chyba
na e.j. není ošetření aplikováno dokonale stejně

↓

způsobeno technickými problémy nebo špatnou metodikou

⇓

ZLEPŠENÍ VYBAVENÍ (METODIKY)

PLÁNOVÁNÍ EXPERIMENTŮ - znáhodnění

- 1) **experimenální jednotky jsou náhodně vybírány z <u>definovaného</u> základního souboru**

- 2) **jednotlivá ošetření jsou experimentálním jednotkám přiřazovány náhodně**

PLÁNOVÁNÍ EXPERIMENTŮ –
- základní typy

úplně znáhodněné uspořádání
(completely randomized design)

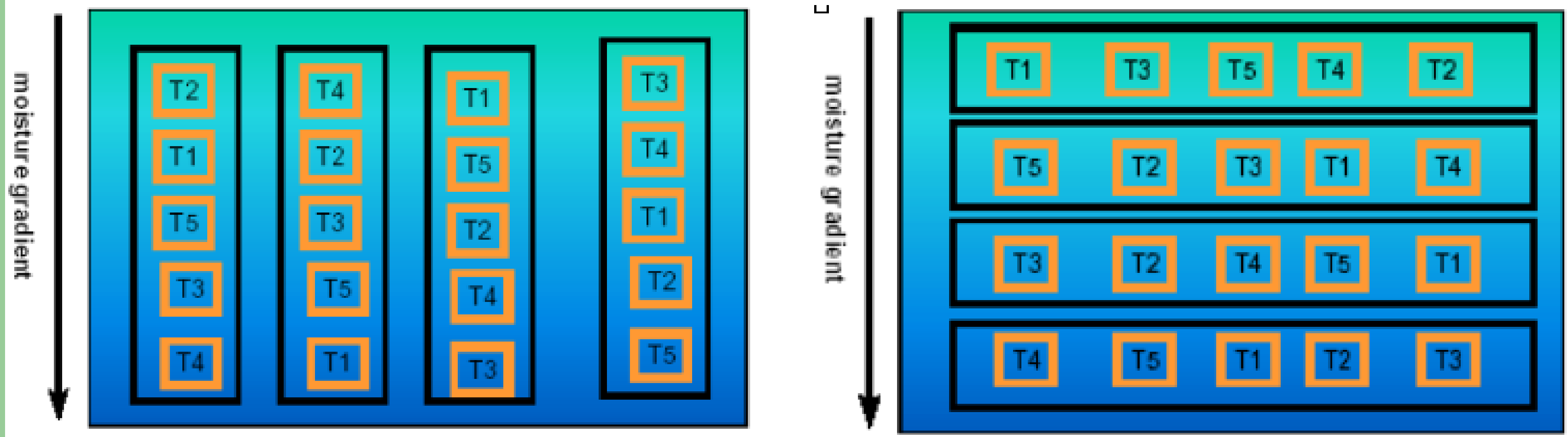
$$x_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

A	B	C	D	B
C	B	A	C	D
A	B	C	D	A
B	C	A	D	D

PLÁNOVÁNÍ EXPERIMENTŮ –
- základní typy

znáhodněné bloky

(randomized block design)



$$x_{ijk} = \mu + \alpha_j + \beta_i + \varepsilon_{ijk}$$

vliv ošetření   vliv bloku

PLÁNOVÁNÍ EXPERIMENTŮ –
- základní typy

latinské čtverce (Latin squares)

		Sloupce			
		S1	S2	S3	S4
Řádky	R1	A	B	C	D
	R2	B	A	D	C
	R3	C	D	A	B
	R4	D	C	B	A

$$x_{ijkl} = \mu + \alpha_j + \delta_j + \gamma_k + \varepsilon_{ijkl}$$

ošetření sloupce řádky

PLÁNOVÁNÍ EXPERIMENTŮ –
- základní typy

ANOVA s opakovanými měřeními (repeated measures design)

Skupina	Měřený subjekt	Časové okamžiky měření			
		t_1	t_2	…	t_i
A	a	x_{Aa1}	x_{Aa2}	…	x_{Aai}
A	b	x_{Ab1}	x_{Ab2}	…	x_{Abi}
A	c	x_{Ac1}	x_{Ac2}	…	x_{Aci}
B	a	x_{Ba1}	x_{Aa2}	…	x_{Aai}
B	b	x_{Bb1}	x_{Bb2}	…	x_{Bbi}
B	c	x_{Bc1}	x_{Bc2}	…	x_{Bci}

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_j + \tau_i + (\alpha\tau)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

ošetření čas interakce ošetření x čas