Odvození vzorců pro výpočet objemů a povrchů některých těles užitím integrálního počtu

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací funkce $y = f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ kolem osy x, lze spočítat podle vzorce

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Povrch téhož tělesa spočítáme vzorcem

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Koule a její části

Koule

Rovnice kružnice se středem $S[0;0]$ a poloměrem r je dána vztahem

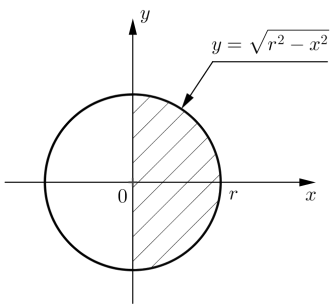
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Kružnici lze rozdělit na dva oblouky, z nichž první leží v polorovině určené kladnými hodnotami osy y a je funkcí s rovnicí

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}\ ,$$

druhý oblouk, jenž leží v opačné polorovině a jehož body mají záporné y-ové souřadnice, je popsán rovnicí

$$y = -\sqrt{r^2 - x^2}\ .$$



Bude-li kolem osy x rotovat 1/2 horního oblouku o rovnici $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, jehož kolmým průmětem do osy x je interval $\langle 0; r\rangle$, získáme 1/2 koule, jejíž objem spočítáme jako

$$V = \pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Objem celé **koule** o poloměru r je pak dán vztahem

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Abychom mohli spočítat povrch koule, určíme nejprve 1. derivaci funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Tedy

$$y' = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Pak je

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

Povrch 1/2 koule spočítáme

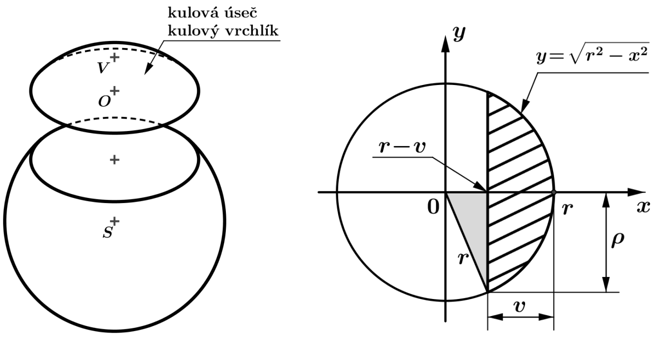
$$P = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2-x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\ \mathrm{d}x = 2\pi \left[r \cdot x\right]_0^r = 2\pi r^2$$

Povrch celé **koule** o poloměru r je

$$\boxed{P = 4\pi r^2}$$

Kulová úseč a kulový vrchlík

Kulová úseč je část koule, kterou můžeme z koule oddělit poté, co jsme ji proťali rovinou ρ. Kulová úseč je tedy těleso.
Kulový vrchlík je plocha, kterou je kulová úseč omezena (bez příslušného kruhu). Názorně si kulový vrchlík můžeme představit jako „čepičku“.



Při výpočtu objemu kulové úseče, případně povrchu kulového vrchlíku, postupujeme stejně jako při výpočtu objemu/povrchu koule, pouze změníme meze. Pokud je v výška kulové úseče, dolní mez bude mít hodnotu $r - v$, horní mez zůstává rovna r.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{r-v}^{r} (r^2 - x^2)\ \mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{r-v}^{r} = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2(r-v) + \frac{\overbrace{(r-v)^3}^{r^3 - 3r^2v + 3rv^2 - v^3}}{3} \right) = \\ &= \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} - r^3 + r^2 v + \frac{r^3}{3} - r^2 v + rv^2 - \frac{v^3}{3} \right) = \pi \left(rv^2 - \frac{v^3}{3} \right) = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v) \end{aligned}$$

Označíme-li ρ poloměr kruhu, kterým je kulová úseč omezena, je alternativní tvar vzorce pro výpočet jejího objemu

$$\boxed{V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)}$$

Tento tvar získáme užitím Pythagorovy věty

$$r^2 = \rho^2 + (r - v)^2,$$

z čehož lze vyjádřit

$$r = \frac{\rho^2 + v^2}{2v}$$

Dosazením do výrazu pro objem kulové úseče získáme

$$V = \frac{\pi v^2}{3}\left(\frac{3\rho^2 + 3v^2}{2v} - v\right) = \frac{\pi v^2}{3}\left(\frac{3\rho^2 + 3v^2 - 2v^2}{2v}\right) = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)$$

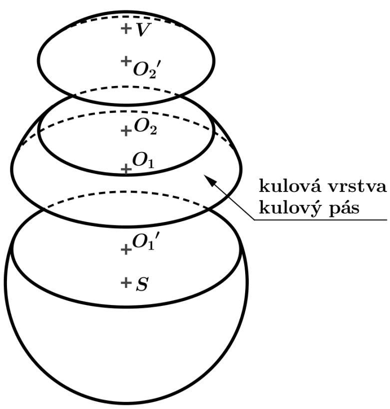
Povrch kulového vrchlíku (případně kulové úseče) vypočítáme podobně jako povrch koule – v užitém integrálu pouze změníme meze

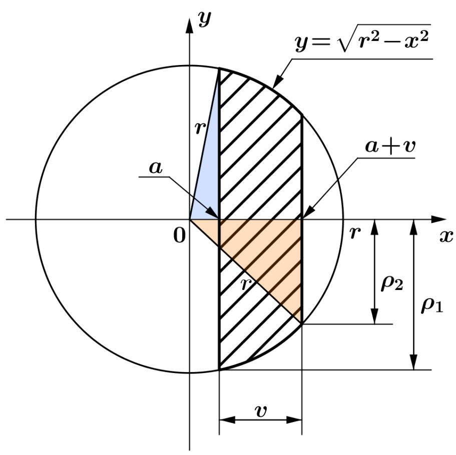
$$P = 2\pi \int\limits_{r-v}^{r} r \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[r \cdot x\right]_{r-v}^{r} = 2\pi \left(r^2 - r(r - v)\right) = 2\pi(r^2 - r^2 + rv) = 2\pi rv$$

$$\boxed{P = 2\pi rv}$$

Kulová vrstva a kulový pás

Kulová vrstva je část koule, kterou můžeme z koule oddělit poté, co jsme ji proťali dvěma rovnoběžnými rovinami ρ a σ. Kulová vrstva mezi těmito rovinami leží, jedná se o těleso.
Kulový pás je plocha, kterou je kulová vrstva omezena (bez obou příslušných kruhů).





Výpočet objemu kulové vrstvy provádíme analogicky jako výpočet objemu koule, opět ale musíme změnit meze. Označme v výšku kulové vrstvy. Má-li dolní mez hodnotu a, bude horní mez určena výrazem $a + v$.

$$V = \pi \int\limits_{a}^{a+v} (r^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{a}^{a+v} = \pi \left(r^2(a + v) - \frac{\overbrace{(a + v)^3}^{a^3+3a^2v+3av^2+v^3}}{3} - r^2 a + \frac{a^3}{3}\right) =$$

$$= \pi \left(r^2 a + r^2 v - \frac{a^3}{3} - a^2 v - av^2 - \frac{v^3}{3} - r^2 a + \frac{a^3}{3}\right) = \pi \left(r^2 v - a^2 v - av^2 - \frac{v^3}{3}\right)$$

Získaný výraz upravíme užitím Pythagorovy věty ve tvaru

$$r^2 = \rho_1^2 + a^2,$$

kde ρ_1 označuje poloměr „spodního“ kruhu, kterým je kulová vrstva omezena.
Po dosazení bude

$$V = \pi \left(\left(\rho_1^2 + a^2\right) v - a^2 v - av^2 - \frac{v^3}{3}\right) = \pi \left(\rho_1^2 v - av^2 - \frac{v^3}{3}\right)$$

Pro další úpravu užijeme Pythagorovu větu

$$r^2 = \rho_2^2 + (a+v)^2,$$

kde ρ_2 označuje poloměr „horního“ kruhu omezujícího kulovou vrstvu.
Porovnáním pravých stran v uvedených rovnostech získáme

$$\rho_1^2 + a^2 = \rho_2^2 + (a+v)^2$$

Úpravou lze vyjádřit a jako

$$a = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 - v^2}{2v}$$

Potom konečně dopočítáme objem V tak, že

$$V = \pi\left(\rho_1^2 v - \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 - v^2}{2v}v^2 - \frac{v^3}{3}\right) = \pi\left(\rho_1^2 v - \frac{\rho_1^2 v - \rho_2^2 v - v^3}{2} - \frac{v^3}{3}\right) = \pi\left(\frac{\rho_1^2 v}{2} + \frac{\rho_2^2 v}{2} + \frac{v^3}{6}\right)$$

Objem kulové vrstvy tedy spočítáme podle vzorce

$$\boxed{V = \frac{\pi v}{6}\left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2\right)}$$

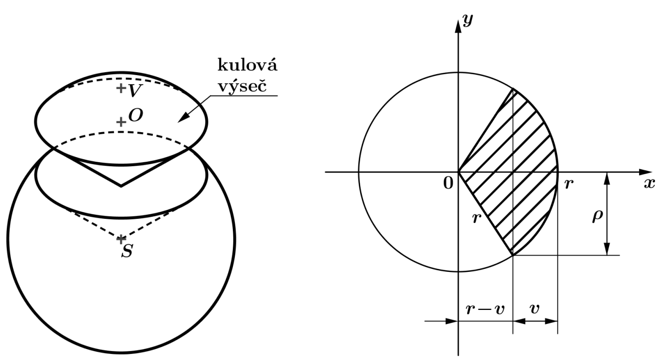
Povrch kulového pásu (případně kulové vrstvy) spočítáme snadno

$$P = 2\pi \int\limits_a^{a+v} r \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[r \cdot x\right]_a^{a+v} = 2\pi\left(r(a+v) - ra\right) = 2\pi(ra + rv - ra) = 2\pi r v$$

$$\boxed{P = 2\pi r v}$$

Kulová výseč

Kulová výseč je těleso, které vznikne sjednocením kulové úseče a rotačního kužele, jehož vrcholem je střed koule. Přitom je podstavná kružnice rotačního kužele zároveň „hraniční“ kružnicí omezující kruhovou úseč.
Názorně si kulovou výseč můžeme představit jako kournout s kopečkem zmrzliny.



Objem kulové výseče získáme součtem objemu rotačního kužele a objemu kulové úseče.
Pro objem rotačního kužele platí známý vztah

$$\boxed{V_k = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{r}^2 \cdot \overline{v}},$$

kde $\overline{r}$ označuje poloměr podstavy kužele a $\overline{v}$ je výška kužele.
Platnost tohoto vzorce odvodíme později.

Objem kulové úseče jsme vyjádřili vztahem

$$V_u = \frac{\pi v}{6}\left(3\rho^2 + v^2\right) \ ,$$

přičemž ρ je poloměr podstavy kulové úseče a v je její výška.

Označuje-li r poloměr koule, je výška kužele $\overline{v}$ rovna hodnotě $\overline{v} = r - v$ a poloměr $\overline{r}$ podstavy kužele je totožný s poloměrem ρ podstavy kulové úseče, takže je $\overline{r} = \rho$.

Pak je objem kulové výseče roven

$$V = V_k + V_u = \frac{\pi}{3}\rho^2(r-v) + \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2) = \frac{\pi\rho^2 r}{3} - \frac{\pi\rho^2 v}{3} + \frac{\pi\rho^2 v}{2} + \frac{\pi v^3}{6} = \frac{\pi\rho^2 r}{3} + \frac{\pi\rho^2 v}{6} + \frac{\pi v^3}{6}$$

Pro další úpravu užijeme Pythagorovu větu ve tvaru

$$r^2 = \rho^2 + (r-v)^2 \, ,$$

odkud vyjádříme

$$\rho^2 = 2rv - v^2$$

Dosazením je

$$V = \frac{\pi(2rv - v^2)r}{3} + \frac{\pi(2rv - v^2)v}{6} + \frac{\pi v^3}{6} = \frac{2\pi r^2 v}{3} - \frac{\pi r v^2}{3} + \frac{\pi r v^2}{3} - \frac{\pi v^3}{6} + \frac{\pi v^3}{6} = \frac{2\pi r^2 v}{3}$$

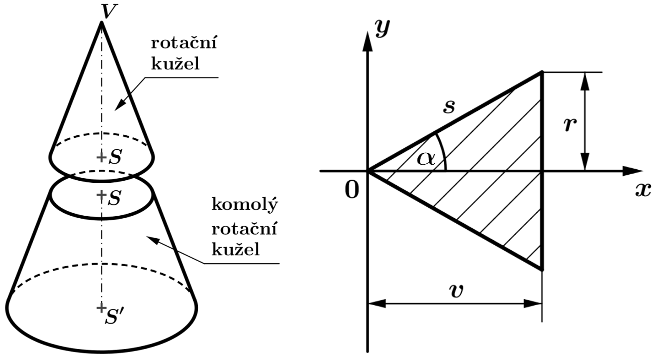
Objem kulové výseče lze tedy spočítat vzorcem

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi r^2 v}$$

Rotační kužel a jeho část

Rotační kužel

Podstavou rotačního kužele je kruh se středem S a poloměrem r, osa rotačního kužele je kolmá na rovinu podstavy, označme v jeho výšku, tj. délku úsečky SV.



V souřadném systému $(0, x, y)$ určeme rovnici přímky p, jejíž rotací kolem osy x rotační kužel vznikne.
Přímka p prochází bodem $[0; 0]$. Proto má její rovnice tvar $y = k \cdot x$, kde k je směrnice přímky a platí, že $k = \operatorname{tg} \alpha$.
Protože přímka p dále prochází bodem $[v; r]$, je $k = \frac{r}{v}$.
Rovnice přímky p je tedy

$$y = \frac{r}{v} \cdot x$$

Přitom uvažujeme, že kolem osy x rotuje pouze část přímky p – úsečka – jejímž kolmým průmětem do osy x je interval $\langle 0, v\rangle$.

Potom spočítáme **objem rotačního kužele**

$$V = \pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2} \cdot x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{r^2}{v^2} \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^v = \pi \cdot \frac{r^2}{v^2} \cdot \frac{v^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

Platí tedy známý vzorec pro výpočet objemu rotačního kužele

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 v}$$

Povrch rotačního kužele získáme součtem obsahu jeho podstavy ($= \pi r^2$) a obsahu pláště.

Odvodíme pouze vzorec pro ***výpočet obsahu pláště rotačního kužele*** ve tvaru

$$\boxed{S = \pi r s},$$

kde s je délka ***površky*** rotačního kužele.

Z rovnice přímky p nejprve určíme 1. derivaci

$$y' = \frac{r}{v}$$

a poté spočítáme

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{v^2}} = \sqrt{\frac{v^2 + r^2}{v^2}} = \sqrt{\frac{s^2}{v^2}} = \frac{s}{v}\,,$$

neboť jsme užili Pythagorovu větu ve tvaru

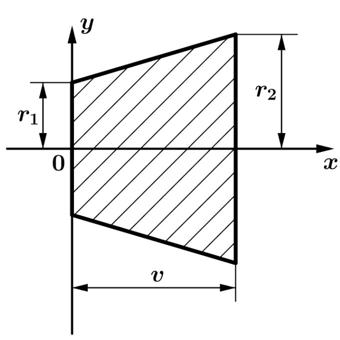
$$s^2 = v^2 + r^2$$

Dále

$$S = 2\pi \int_0^v \frac{r}{v} \cdot x \cdot \frac{s}{v} \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{r}{v} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{s}{v}\right]_0^v = 2\pi \cdot \frac{r}{v} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{s}{v} = \pi \cdot r \cdot s$$

Komolý rotační kužel

Komolý rotační kužel je část rotačního kužele omezená dvěma rovnoběžnými rovinami, které jsou kolmé na osu kužele.



Nejprve určíme rovnici přímky p, jejíž rotací kolem osy x komolý rotační kužel vytvoříme.

Přímka p prochází dvěma body $[0; r_1]$ a $[v; r_2]$,

kde r_1 je poloměr „spodní“ podstavy,
r_2 je poloměr „horní“ podstavy
a v je výška komolého kužele.

Konstanty k a q v rovnici $y = kx + q$ přímky p dopočítáme dosazením uvedených bodů, takže je $q = r_1$ a $r_2 = kv + r_1$, odkud $k = \dfrac{r_2 - r_1}{v}$.

Přímka p je tedy popsána rovnicí

$$y = \frac{r_2 - r_1}{v} \cdot x + r_1$$

Přitom kolem osy x rotuje pouze úsečka vymezená na přímce p tak, aby jejím kolmým průmětem do osy x byl interval $\langle 0, v\rangle$.

Objem komolého rotačního kužele je

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^v \left(\frac{r_2-r_1}{v}\cdot x + r_1\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\left[\frac{\left(\frac{r_2-r_1}{v}\cdot x + r_1\right)^3}{3}\cdot\frac{v}{r_2-r_1}\right]_0^v = \\
&= \frac{\pi v}{3(r_2-r_1)}\left[\left(\frac{r_2-r_1}{v}\cdot v + r_1\right)^3 - \left(\frac{r_2-r_1}{v}\cdot 0 + r_1\right)^3\right] = \frac{\pi v}{3(r_2-r_1)}\cdot(r_2^3-r_1^3) = \\
&= \frac{\pi v}{3}\cdot(r_2^2+r_2r_1+r_1^2),
\end{aligned}$$

přičemž jsme užili vzorec

$$r_2^3-r_1^3=(r_2-r_1)\cdot(r_2^2+r_2r_1+r_1^2)$$

Je tedy

$$\boxed{V=\frac{\pi v}{3}\cdot(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)}$$

Povrch komolého rotačního kužele je roven součtu obsahů jeho podstav (πr_1^2 a πr_2^2) a obsahu pláště.

Odvodíme pouze vzorec pro ***výpočet obsahu pláště komolého rotačního kužele*** ve tvaru

$$\boxed{S=\pi(r_1+r_2)\sqrt{v^2+(r_1-r_2)^2}}$$

Nejprve spočítáme 1. derivaci funkce, kterou je určena přímka p

$$y'=\frac{r_2-r_1}{v}$$

Potom je

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{(r_2-r_1)^2}{v^2}}=\sqrt{\frac{v^2+(r_2-r_1)^2}{v^2}}=\frac{\sqrt{v^2+(r_2-r_1)^2}}{v}$$

Dále

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^v \left(\frac{r_2-r_1}{v}\cdot x + r_1\right)\cdot\frac{\sqrt{v^2+(r_2-r_1)^2}}{v}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2\pi\sqrt{v^2+(r_2-r_1)^2}}{v}\cdot\left[\frac{\left(\frac{r_2-r_1}{v}\cdot x + r_1\right)^2}{2}\cdot\frac{v}{r_2-r_1}\right]_0^v = \\
&= \frac{2\pi\sqrt{v^2+(r_2-r_1)^2}\cdot v}{2\cdot v\cdot(r_2-r_1)}\cdot\left[\left(\frac{r_2-r_1}{v}\cdot x + r_1\right)^2\right]_0^v = \\
&= \frac{\pi\sqrt{v^2+(r_2-r_1)^2}}{r_2-r_1}\cdot\left[\left(\frac{r_2-r_1}{v}\cdot v + r_1\right)^2 - \left(\frac{r_2-r_1}{v}\cdot 0 + r_1\right)^2\right] = \\
&= \frac{\pi\sqrt{v^2+(r_2-r_1)^2}}{r_2-r_1}\cdot\left(r_2^2-r_1^2\right) = \pi\sqrt{v^2+(r_2-r_1)^2}\cdot(r_2+r_1)
\end{aligned}$$

Přitom jsme užili vzorec

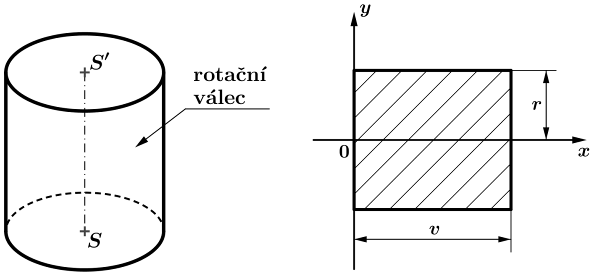
$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1)$$

a je také zřejmé, že platí

$$(r_2 - r_1)^2 = (r_1 - r_2)^2$$

Rotační válec

Určit objem a povrch rotačního válce je v porovnání s předchozími výpočty už snadné.



Válec vznikne rotací přímky p kolem osy x. Přímka p je s osou x rovnoběžná a protíná osu y v bodě $[0; r]$, je tedy určena rovnicí $y = r$.
Přitom kolem osy x rotuje pouze úsečka na přímce p, jejímž kolmým průmětem do osy x je interval $\langle 0; v \rangle$.

Objem rotačního válce spočítáme

$$V = \pi \int_0^v r^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left[r^2 \cdot x \right]_0^v = \pi r^2 v$$

Povrch rotačního válce je roven součtu obsahů obou podstav ($= 2 \cdot \pi r^2$) a obsahu pláště. Odvodíme vzorec pro ***výpočet obsahu pláště rotačního válce***.

1. derivace funkce, která určuje přímku p, je $y' = 0$.

Spočítáme výraz

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + 0} = 1$$

Pak je

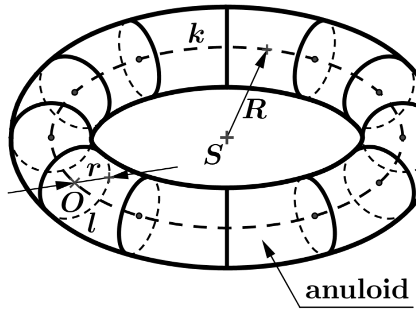
$$S = 2\pi \int_0^v r \cdot 1 \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[r \cdot x \right]_0^v = 2\pi r v$$

$$\boxed{V = \pi r^2 v} \qquad \boxed{S = 2\pi r v}$$

Anuloid

Uvažujme kružnici k se středem S a poloměrem R ve vodorovné rovině. Ve svislé rovině, která prochází bodem S, nechť leží kružnice l se středem O a poloměrem r. Přitom střed O nechť je bodem kružnice k. Jestliže se bod O bude pohybovat po kružnici k, vytvoří kružnice l **anuloid**.

Názorně si anuloid můžeme představit jako nafukovací plavací kruh.



Pro **objem a povrch anuloidu** platí následující vztahy:

$$\boxed{V = 2\pi^2 r^2 R} \qquad \boxed{P = 4\pi^2 r R}$$

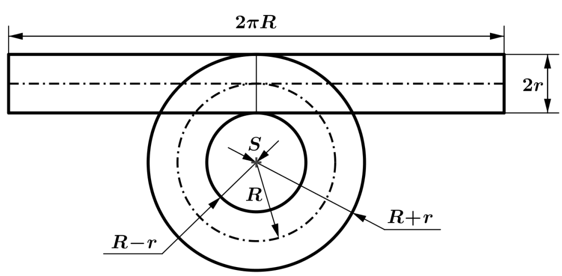
Jejich platnost odvodíme tak, že si představíme, že anuloid podél kružnice l „rozřežeme“ a natáhneme ho do válce. Objem a obsah pláště takto vytvořeného válce bude stejný jako objem a povrch anuloidu.
Podstavou válce je kruh s hraniční kružnicí l a výška válce v je rovna délce kružnice k, je tedy $v = 2\pi R$.

Pak je

$$V = \pi r^2 v = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

$$P = 2\pi r v = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

Pravdivost předchozí úvahy si můžeme demonstrovat na zjednodušeném příkladě, kdy mezikruží natáhneme do obdélníka a porovnáme jejich obsahy.



Obsah mezikruží je

$$S = \pi(R+r)^2 - \pi(R-r)^2 = \pi\left[R^2 + 2Rr + r^2 - (R^2 - 2Rr + r^2)\right] = 4\pi Rr$$

Obsah obdélníka je $S = 2\pi R \cdot 2r = 4\pi Rr$, takže vidíme, že se skutečně sobě rovnají.

Závěrem přidejme ještě poznámku týkající se **objemu kosého kužele**.

Uvažujme kosý kužel, jehož podstavou je kruh o poloměru r v půdorysně π. Výška v kužele je vzdálenost jeho vrcholu V od půdorysny π, tj. $v = |V_1V|$, kde V_1 je půdorys bodu V.

Pro objem kosého kužele zůstává v platnosti vztah

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 v}$$

To lze zdůvodnit pomocí zjednodušené analogie, kdy všechny trojúhelníky se základnami délky a, umístěnými na přímku p, a vrcholy ležícími na přímce q, $q \parallel p$, mají tentýž obsah $S = \dfrac{av}{2}$, kde v je vzdálenost přímek p a q.